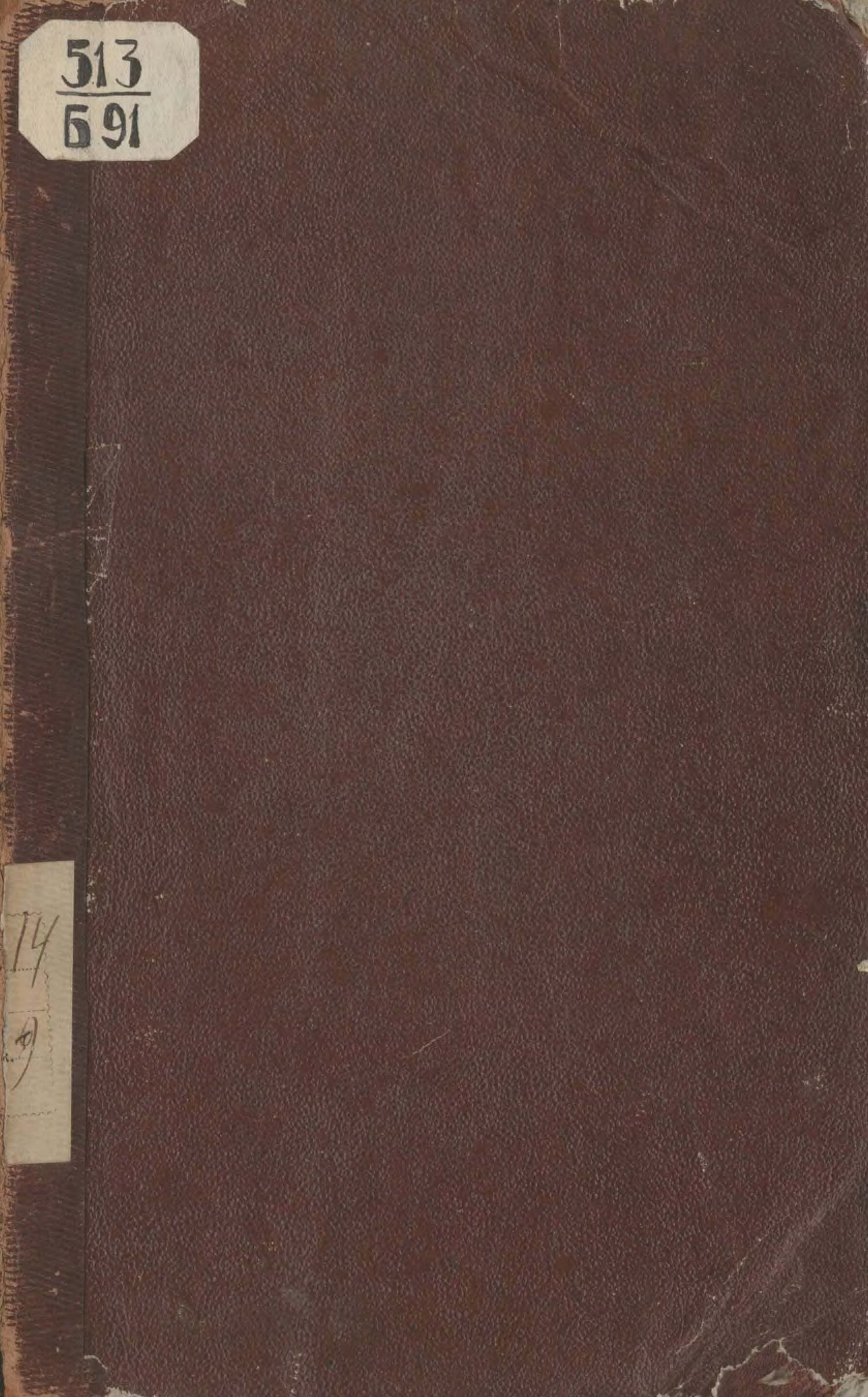
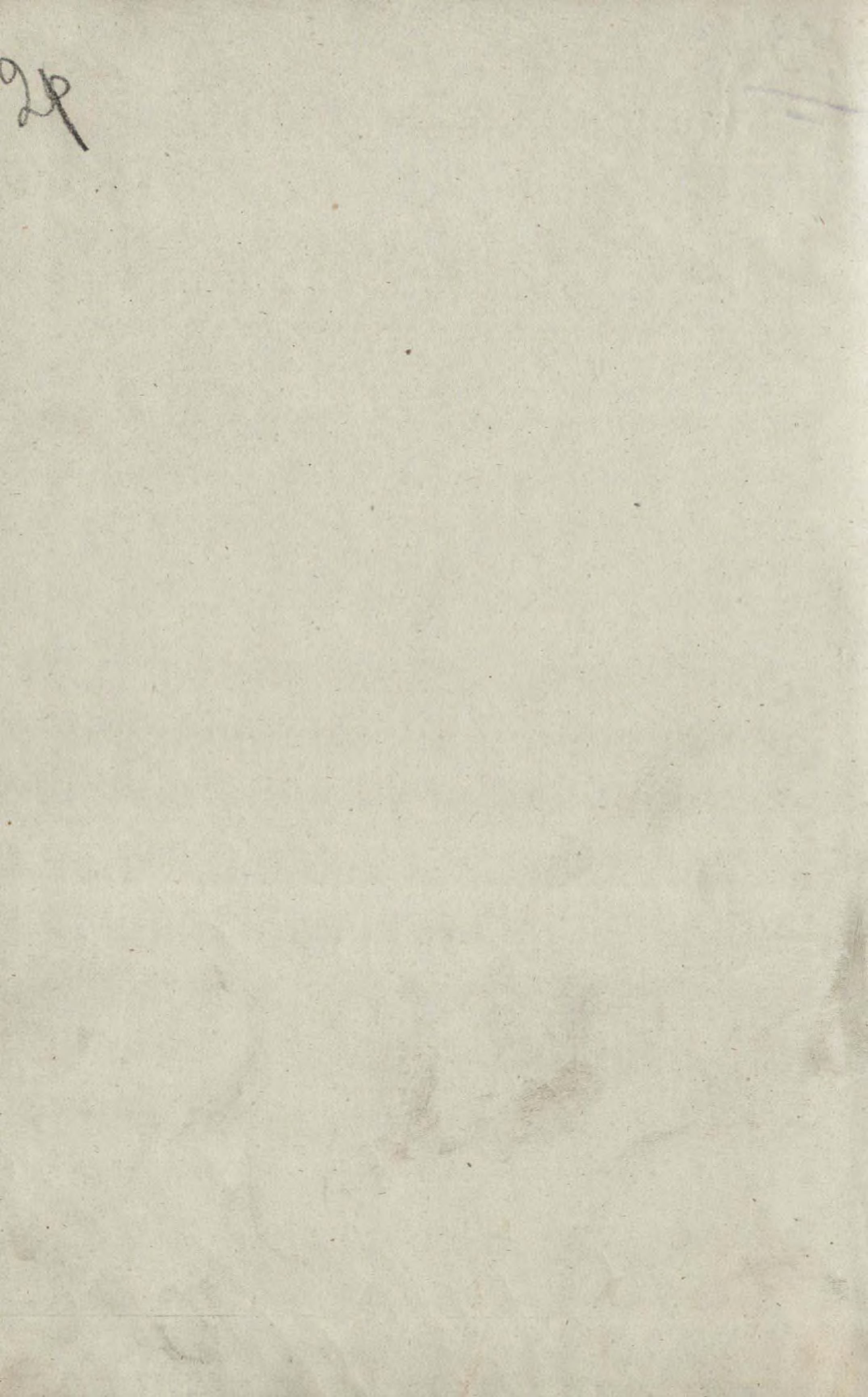


513
Б 91
14



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

СОЧИНЕНІЕ

АКАДЕМИКА В. БУНЯКОВСКАГО.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1853.

Получать можно у Коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. Глазунова, въ СПб., П. Должикова, въ Кіевѣ,

Эггерса и Ком., въ СПб., Л. Фосса, въ Лейпцигѣ.

Кромѣ того, какъ здѣшніе, такъ и иногородные подписчики могутъ обращаться съ своими требованіями въ Комитетъ Правленія Академіи Наукъ.

—

Цѣна 35 коп. сер.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

СОЧИНЕНІЕ

АКАДЕМИКА В. БУНЯКОВСКАГО.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1853.

Получать можно у Коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ:

И. Глазунова, въ СПб., П. Должикова, въ Кіевѣ,
Эггерса и Ком., въ СПб., Л. Фосса, въ Лейпцигѣ.

Кромѣ того, какъ здѣшніе, такъ и иногородные подписчики могутъ обращаться съ своими требованіями въ Комитетъ Правленія Академіи Наукъ.

—

Цѣна 35 коп. сер.

Напечатано по распоряженію I-го Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ.

9 Сентября 1853 года.

Непремѣнный Секретарь П. Фусъ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.

Въ предлагаемомъ Опытѣ я имѣлъ въ виду познакомить любителей Геометріи съ постепеннымъ развитіемъ и современнымъ состояніемъ основнаго вопроса о теоріи *параллельныхъ линій*, столь важнаго для науки. Прослѣдивъ критически болѣе или менѣе неудовлетворительныя попытки прежнихъ геометровъ по этому предмету, я остановился на новѣйшихъ изслѣдованіяхъ, ближе соотвѣтствующихъ цѣли, и подвергъ ихъ внимательному разбору. Для полноты изложенія, я привелъ также собственныя изысканія и соображенія по упоминаемой теоріи, отчасти уже извѣстныя по тремъ отдѣльнымъ моимъ мемуарамъ *), а отчасти появляющіяся здѣсь въ первый разъ.

1. Теорія параллельныхъ линій, какъ краеугольный камень Геометріи, постоянно обращала на себя вниманіе геометровъ. Но, не смотря на всѣ усилія утвердить ее на основаніи совершенно прочномъ, придуманныя доказательства, отъ Эвклида до нашихъ временъ, подаютъ поводъ къ возраженіямъ, кото-

*) 1⁰ *Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles* (Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. VI Série. Sc. Mathématiques et Physiques, T. IV);

2⁰ *Nouvelle théorie des parallèles* (тамъ же);

3⁰ *Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la Géométrie élémentaire* (Bulletin phys.-mathém. T. IX, N⁰ 4).

рыя, по видимому, не легко могутъ быть вполнѣ устранены. Эвклидъ, въ своей Геометріи, принялъ за аксіому (аксіома 11-я), что *когда двѣ прямыя пересѣчены третею, и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, не равна двумъ прямымъ угламъ, то двѣ линіи пересѣкутся.* Изъ этого предложенія, которое не имѣетъ степени очевидности, требуемой отъ аксіомы, выводится уже со всею строгостію вся теорія параллельныхъ линій. Геометры, писавшіе послѣ Эвклида, не побѣдили главнаго затрудненія: собственно говоря, они парадоксально обходили его, допуская, скрытнымъ образомъ, или приведенный сейчасъ постулатъ, или какую-либо другую истину, изъ него же проистекающую. Такъ, напримѣръ, находимъ во многихъ сочиненіяхъ о Геометріи, что параллельными линіями называются такія *двѣ прямыя, которыхъ взаимное разстояніе вездѣ одинаково.* Безу, сказавъ, что параллельными линіями называются *двѣ прямыя, которыя, находясь въ одной плоскости, и бывъ продолжены какъ угодно далеко, нигдѣ не пересѣкаются,* заключилъ изъ этого опредѣленія, безъ всякаго доказательства, объ отличительномъ свойствѣ ихъ равноотстоянія. Нѣтъ надобности останавливаться на погрѣшительности перваго опредѣленія, а также на томъ, въ какой степени заключеніе Безу произвольно. Послѣдующіе разборы ясно обнаружатъ парадоксы, въ которые неумышленно впадали геометры, занимавшіеся доказательствомъ теоріи параллельныхъ линій.

Чтобы придать дальнѣйшему изложенію возможную степень ясности, предложимъ здѣсь перечень нѣкоторыхъ предложеній, изъ которыхъ каждое можетъ привести, съ бо̀льшею или мѐньшею простотою, къ полному доказательству истинъ, составляющихъ ученіе о параллельныхъ линіяхъ. И во-первыхъ, условимся въ самомъ ихъ опредѣленіи. Подъ *параллельными линіями* мы будемъ разумѣть *прямыя линіи, перпендикулярныя къ данной прямой, и заключающіяся съ нею въ одной плоскости.* Часть этой данной прямой, ограниченную двумя параллельными линіями, для сокращенія рѣчи, назовемъ *основаніемъ* параллельныхъ. Въ силу такого опредѣленія прямо заключаемъ, что *параллельныя линіи, какъ бы далеко не были продолжены, никогда не пересѣкутся.*

Приведенное опредѣленіе можно также предложить и въ

слѣдующемъ видѣ: *двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной плоскости, и составляющія съ третею внутренніе углы, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ, называются параллельными*, и заключить потомъ, что эти линіи нигдѣ не встрѣтятся. Очевидно, что оба опредѣленія равнозначащи.

Перейдемъ теперь къ основнымъ предложеніямъ, ведущимъ къ строгому доказательству всѣхъ свойствъ параллельныхъ линій; число этихъ истинъ очень значительно: ограничимся перечнемъ главныхъ изъ нихъ. Характеристическія предложенія, о которыхъ говоримъ, могутъ быть раздѣлены, по сущности своей, на три рода, именно: на предложенія, относящіяся 1° *къ взаимному пересѣченію прямыхъ линій*; 2° *къ свойствамъ угловъ*, и 3° *къ свойствамъ линій въ разсужденіи опредѣленной ихъ длины*.

Предложенія 1го рода.

a) Когда двѣ прямыя пересѣчены третею, и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, не равна двумъ прямымъ угламъ, то эти двѣ линіи пересѣкаются. Въ этомъ свойствѣ состоитъ 11-я Эвклидова аксіома или Эвклидовъ постулатъ.

b) Наклонная и перпендикуляръ къ одной и той же прямой линіи, по достаточномъ ихъ продолженіи, всегда пересѣкутся.

c) Чрезъ данную точку можно провести только одну линію, параллельную данной прямой.

d) Когда прямая линія пересѣкаетъ одну изъ двухъ параллельныхъ между собой прямыхъ, то непремѣнно пересѣчетъ и другую (см. n° 2).

e) Перпендикуляръ, возставленный изъ какой ни есть точки одной изъ двухъ параллельныхъ между собой прямыхъ линій, непремѣнно пересѣчетъ и другую *).

f) Чрезъ всякую точку, взятую внутри опредѣленнаго угла, можно провести прямую, пересѣкающую обѣ стороны этого самаго угла (см. окончаніе n° 11).

---

*) Можетъ быть нѣкоторые изъ нашихъ читателей затруднятся примѣненіемъ этого предложенія къ доказательству какого-либо основнаго, общеупотребительнаго свойства параллельныхъ линій. Отсылаемъ къ n° 11-му этого Опыта, гдѣ вполнѣ разъясненъ вопросъ.

*

Предложенія 2го рода.

a) Сѣкущая, встрѣчающая одну изъ двухъ параллельныхъ между собою линій подъ прямымъ угломъ, будетъ вмѣстѣ перпендикулярна и къ другой.

b) Когда двѣ параллельныя линіи пересѣчены косвенно третею прямою, то изъ осьми угловъ, образуемыхъ при этой встрѣчѣ, 1^0 четыре острые будутъ равны между собою; 2^0 четыре тупые также равны, и 3^0 каждый острый будетъ служить тупому дополненіемъ къ двумъ прямымъ угламъ.

c) Сумма трехъ угловъ какого ни есть прямолинейнаго треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.

d) Можно построить такой треугольникъ, что сумма угловъ его будетъ равна двумъ прямымъ угламъ (n^0 20).

e) Сумма трехъ угловъ треугольника постоянная *).

f) Существуетъ такая четырехъ-сторонная прямолинейная фигура, въ которой или всѣ четыре угла прямые, или сумма ихъ равна четыремъ прямымъ.

g) Два угла треугольника опредѣляютъ третій (n^0 14).

Предложенія 3го рода.

a) Разстоянія между параллельными линіями вездѣ равны между собою, или, что все равно: если изъ всѣхъ точекъ прямой линіи возставимъ равные перпендикуляры, то концы ихъ будутъ находиться также на одной прямой линіи.

b) Разстояніе между двумя прямыми линіями не можетъ сперва увеличиваться, а потомъ уменьшаться, и обратно (n^0 5).

c) Пересѣченіе двухъ прямыхъ линій, или данный прямолинейный уголъ, не можетъ привести къ линіи опредѣленной длины (n^0 14).

---

*) Это предложеніе ведетъ непосредственно къ предложенію c). Дѣйствительно, пусть будутъ A, B и C углы даннаго треугольника, а S постоянная ихъ сумма; если изъ какой ни есть его вершины опустимъ перпендикуляръ на противолежащую сторону, то получимъ два прямоугольные треугольника; сумма ихъ шести угловъ будетъ очевидно $A+B+C+2d$, разумѣя подъ d прямой уголъ. Съ другой стороны, эта самая сумма, въ силу предложенія, о которомъ идетъ рѣчь, равна постоянной величинѣ $2S$; слѣдовательно $A+B+C+2d=2S$, и какъ $A+B+C=S$, то и будетъ $A+B+C=S=2d$.

d) Длина прямой линіи не можетъ опредѣлить угла (n° 22).

e) При данномъ остромъ углѣ можно построить такой прямоугольный треугольникъ, что сторона его, прилежащая къ этому углу и къ углу прямому, будетъ какъ угодно велика (n° 11).

f) Сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна его радіусу.

Обратимъ также вниманіе нашихъ читателей на то обстоятельство, что при доказательствахъ теоріи параллельныхъ линій обыкновенно представляются два случая, изъ которыхъ одинъ рѣшается со всею строгостію, а другой, въ какомъ бы видѣ онъ не представлялся, всегда подаетъ поводъ къ затрудненіямъ. При внимательномъ соображеніи различныхъ ниже изложенныхъ способовъ усмотримъ, что случай, котораго доказательство не подлежитъ возраженіямъ, находится постоянно въ зависимости отъ слѣдующаго свойства: *прямая линія A, соединяющая концы двухъ равныхъ перпендикуляровъ, возставленныхъ къ данной прямой, не можетъ быть меньше линіи B, соединяющей ихъ основанія;* эта истина доказывается со всею строгостію. Напротивъ того, доказательство, что *прямая линія A не можетъ быть болѣе линіи B*, представляло всегда особенныя затрудненія. — Эти двѣ истины могутъ быть замѣнены и другими, равносильными съ ними. Такъ, напримѣръ, можно доказать съ геометрическою точностію, что *сумма угловъ всякаго прямолинейнаго треугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ;* напротивъ того, доказательство, что *эта сумма не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ угловъ*, представляетъ тѣ же затрудненія, какъ и второе изъ предложеній, относящихся къ линіямъ *A* и *B*.

Послѣ этихъ предварительныхъ объясненій, перейдемъ къ разсмотрѣнію различныхъ доказательствъ теоріи параллельныхъ линій. Мы укажемъ сперва, въ короткихъ словахъ, на сущность главнѣйшихъ способовъ, относящихся къ болѣе или менѣе отдаленному отъ насъ времени. Пріемы, о которыхъ будемъ говорить, судя по оставшимся объ нихъ отзывамъ, считались въ свое время вообще удовлетворительными со стороны строгости. Мы увидимъ, что ни одинъ изъ нихъ не можетъ выдержать основательнаго разбора.

2. Древнѣйшее изъ дошедшихъ до насъ доказательствъ принадлежитъ греческому философу Проклу, жившему въ V вѣкѣ по Р. Х.*); оно относится къ 11-й Эвклидовой аксіомѣ. Передаемъ его въ самомъ упрощенномъ видѣ, удержавъ въ немъ только существенное, и откинувъ все излишнее.

Проклъ принялъ за основную аксіому, что *разстояніе между двумя сторонами угла, продолженными неопредѣленно, становится наконецъ болѣе всякаго конечнаго разстоянія.* Вслѣдъ за этимъ онъ переходитъ къ доказательству слѣдующей теоремы:

Когда прямая линія пересѣкаетъ одну изъ двухъ параллельныхъ между собою прямыхъ, то непремѣнно пересѣчетъ и другую.

Л. I. Фиг. 1. Пусть будутъ AB и CD двѣ прямыя, взаимно параллельныя, а EF прямая, пересѣкающая AB въ точкѣ G. Утверждается, что линія EF, достаточно продолженная, пересѣчетъ CD. Дѣйствительно, такъ какъ двѣ прямыя GB и GF составляютъ стороны угла при точкѣ G, то продолживъ ихъ неопредѣленно, окажется, что разстояніе между ними, въ силу допущенной аксіомы, будетъ болѣе всякаго конечнаго разстоянія, а *слѣдовательно болѣе разстоянія между параллельными AB и CD, очевидно конечнаго.* Такимъ образомъ, только-что разстояніе прямой GB отъ прямой GF превзойдетъ разстояніе между параллельными AB и CD, прямая GF, пересѣкающая AB, пересѣчетъ вмѣстѣ и параллельную ей линію CD.

Мы не будемъ далѣе слѣдить за Прокломъ, потому что изъ приведенной сей-часъ теоремы можно уже безъ труда вывести всѣ другія свойства, относящіяся къ параллельнымъ линіямъ. Такъ, напримѣръ, для доказательства встрѣчи наклонной съ перпендикуляромъ, стоитъ только изъ точки G опустить перпендикуляръ GH на CD, и тогда увидимъ, что наклонная GF къ GH пересѣкаетъ перпендикуляръ HD къ той же линіи GH.

Не останавливаясь на томъ, что предложеніе, принятое Прокломъ за аксіому, требовало бы доказательства, мы обратимъ вниманіе только на смыслъ подчеркнутыхъ словъ въ доказательствѣ теоремы. Очевидно, что свойство параллельныхъ ли-

---

*) Мы не упоминаемъ о доказательствѣ Птолемея, потому что изложеніе его такъ неопредѣлительно и темно, что изъ него рѣшительно нельзя вывести никакого заключенія.

ній, по которому *взаимное разстояніе между ними вездѣ конечное*, голословно допущено быть не можетъ. Проклъ принималъ, что перпендикуляръ *IK*, опущенный на *CD* изъ точки *I*, взятой на какомъ угодно разстояніи отъ *G*, не можетъ увеличиться неопредѣленно. Но въ доказательствѣ этого свойства собственно и состоитъ главное затрудненіе. Дѣйствительно, возражающій противъ греческаго философа въ правѣ сказать, что двѣ параллельныя линіи, по мѣрѣ удаленія въ обѣ стороны отъ основанія, расходятся, при чемъ взаимное ихъ разстояніе можетъ увеличиться неопредѣленно. Покамѣстъ такое утвержденіе не опровергнуто, до тѣхъ поръ и окончательное заключеніе не имѣетъ никакой силы.

3. Нассиръ-Эддинъ Ат-Туси, знаменитый персидскій астрономъ и математикъ, родившійся въ началѣ XIII вѣка, предложилъ доказательство теоремы о равенствѣ двумъ прямымъ угламъ суммы угловъ треугольника. Пріемы, предложенные имъ, очень остроумны, и долгое время считались совершенно удовлетворительными. Такъ находимъ у Монтюклы, въ его *Histoire des Mathématiques* (T. I, стр. 378 — 379), отзывъ о способѣ Нассиръ-Эддина, который онъ называетъ *строгимъ* и *удачнымъ*. Доказательство персидскаго математика раздѣлено на *три*, такъ названныя имъ *посылки* (*praemissae*), или *леммы*. Первую изъ нихъ, по ея очевидности, онъ принялъ за *аксіому*, а остальныя двѣ, на основаніи первой, доказалъ съ полною строгостію. Но, вникнувъ въ сущность первой посылки, мы удостовѣримся, что она, въ видѣ аксіомы, допущена быть не можетъ, почему и самое доказательство Нассиръ-Эддина лишено геометрической точности. Войдемъ по этому предмету въ надлежащія подробности. *Первая посылка*, о которой идетъ рѣчь, состоитъ въ слѣдующемъ:

Положимъ, что двѣ прямыя *AB* и *CD*, находящіяся въ одной плоскости, пересѣчены другими прямыми *NO*, *LM*, *IK*, *GH* и проч., падающими перпендикулярно на линію *CD*, и составляющими съ *AB* два угла, одинъ острый, а другой тупой; допустимъ, что острые углы a, a', a'', a'''... обращены въ сторону *A*, а тупые b, b', b'', b'''... въ сторону *B*. Утверждается: 1° Что прямыя *AB* и *CD* приближаются одна къ другой со стороны *AC*, Л. I. Ф. 2.

и, напротивъ того, удаляются со стороны *BD*. Такимъ образомъ, если идемъ отъ стороны *BD* къ *AC*, то перпендикуляры *EF*, *GH*, *IK*.... постепенно уменьшаются, а если отъ стороны *AC* къ *BD*, то перпендикуляры *NO*, *LM*, *IK*... увеличиваются; слѣд. будетъ $NO < LM < IK < \ldots$, и, напротивъ того, $EF > GH > IK > \ldots$ 2° Когда прямыя *AB* и *CD* приближаются со стороны *AC*, а удаляются со стороны *CD*, то перпендикуляры *NO*, *LM*, *IK* и проч. будутъ болѣе съ той стороны, гдѣ прямыя *AB* и *CD* удаляются одна отъ другой, а менѣе тамъ, гдѣ приближаются, такъ что $EF > GH > IK > \ldots$., и, напротивъ того, $NO < LM < IK < \ldots$. Вмѣстѣ съ тѣмъ углы острые a, a', a'', a'''.... будутъ находиться со стороны *AC*, а тупые b, b', b'', b'''.... со стороны *BD*.

Нассиръ-Эддинъ, основываясь на этой истинѣ, принятой имъ за *первоначальную*, и которая поэтому не требовала дальнѣйшаго объясненія, предложилъ доказательство *второй посылки* слѣдующаго содержанія:

Л. I. Ф. 3. *Когда концы C и D двухъ равныхъ прямыхъ линій AC и BD, перпендикулярныхъ къ AB, соединимъ прямою CD, то углы при C и D будутъ прямые.*

Дѣйствительно, еслибъ напримѣръ уголъ *BDC* не былъ прямымъ, то былъ бы острымъ или тупымъ. Если онъ острый, то линіи *AB*, *CD* приближаются одна къ другой со стороны *AC*, и тогда, въ силу 1-й посылки, перпендикуляръ *BD* больше перпендикуляра *AC*, между тѣмъ какъ они, по предположенію, равны между собою; и такъ, уголъ *BDC* не можетъ быть острымъ.

Если примемъ, что уголъ *BDC* тупой, то прямыя *AB*, *CD* будутъ удаляться одна отъ другой со стороны *AC*; поэтому, въ силу той же 1-й посылки, перпендикуляръ *AC* будетъ больше перпендикуляра *BD*, что также несправедливо.

Слѣдовательно уголъ *BDC* прямой. Точно такъ докажется, что и уголъ *ACD* прямой.

Мы не будемъ слѣдить за дальнѣйшими остроумными построеніями, придуманными Нассиръ-Эддиномъ для доказательства *третей посылки*, выражающей основное предложеніе о суммѣ угловъ всякаго прямолинейнаго треугольника *). Уже на

---

*) Полное изложеніе способа Нассиръ-Эддина читатели найдутъ, между прочимъ, въ Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, 1788 и 1789 г., въ статьѣ

основаніи 2-й посылки, доказывающей существованіе *прямоугольника ABCD*, можно, различными путями, и притомъ весьма просто и совершенно строго, вывести всѣ свойства параллельныхъ линій. Отсылая по этому предмету къ n° 20 нашего текста, прямо перейдемъ къ указанію на парадоксъ Насcиръ-Эддина, который нерѣдко встрѣчаемъ и въ новѣйшихъ опытахъ теоріи параллельныхъ.

Неточность, какъ мы уже замѣтили выше, заключается въ допущеніи 1-й посылки въ видѣ аксіомы. Кастилліонъ (*Castillion*), въ своемъ: *Second Mémoire sur les parallèles d'Euclide*, на который мы выше ссылались, признавая съ другими математиками неоспоримость ея, но имѣя въ виду придать еще бо́льшую степень убѣдительности способу Насcиръ-Эддина, предложилъ свое доказательство для подтвержденія этой истины (стр. 184 и слѣдующія). Такъ какъ наши возраженія противъ аксіомы послужатъ вмѣстѣ и опроверженіемъ доказательства Кастилліона, то мы и не будемъ приводить здѣсь его доводовъ.

Первая посылка не можетъ быть принята за аксіому по причинѣ неполнаго исчисленія случаевъ, которые должно брать въ соображеніе при взаимномъ расположеніи острыхъ и тупыхъ Л. I.
угловъ $a, a', a''....$, $b, b', b''....$ Дѣйствительно, въ *посылкѣ* допускается, что всѣ углы $a^{IV}, a''', a'', a', a....$, обращенные къ Ф. 2.
сторонѣ AC, суть *острые*, а всѣ углы $b, b', b'', b''', b^{IV}....$, обращенные къ сторонѣ BD, *тупые;* въ этомъ предположеніи всѣ сужденія Насcиръ-Эддина совершенно основательны, и выведенныя имъ слѣдствія неоспоримы. Но будетъ ли это единственнымъ предположеніемъ относительно порядка послѣдованія острыхъ и тупыхъ угловъ? Вникнувъ въ этотъ вопросъ, увидимъ, что существуетъ еще одно, опущенное предположеніе, при которомъ дальнѣйшія сужденія персидскаго геометра, а вмѣстѣ и Кастилліона, становятся ошибочными. Въ самомъ дѣлѣ, никакія соображенія въ разсматриваемой истинѣ не указываютъ на то, по какому закону измѣняются острые углы $a'', a', a...$,

---

Кастилліона: *Second Mémoire sur les parallèles d'Euclide* (стр. 174 — 183), а также у Валльиса въ книгѣ его: Johannis Wallis S. T. D. de Algebra Tractatus, 1693 года, стр. 669.

Л. I. Ф. 4. когда будемъ идти отъ стороны *BD* къ сторонѣ *AC*. На такомъ основаніи представляется возраженіе, что эти острые углы a'', a', a..., увеличиваясь постепенно, приближаются къ значенію *прямаго угла*, и достигаютъ этого предѣла, напримѣръ, при положеніи *PQ* перпендикуляра. Въ такомъ случаѣ *острые углы* будутъ

по правую сторону перпен. *PQ*:	по лѣвую сторону перпен. *PQ*:
$\ldots a'', a', a$	$\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$

а *тупые*

$$\ldots b'', b', b \qquad \beta, \beta', \beta''\ldots$$

и притомъ

$$a > a' > a'' > \ldots \qquad \alpha > \alpha' > \alpha'' > \ldots$$

$$b < b' < b'' < \ldots \qquad \beta < \beta' < \beta'' < \ldots;$$

углы же при *P* и *Q прямые* по самому предположенію.

Такимъ образомъ обнаруживается новый случай относительно взаимнаго положенія двухъ прямыхъ *AB* и *CD*, а именно: Л. I. Ф. 4. перпендикуляры *IK*, *LM*, *NO*...., идущіе отъ стороны *BD* къ сторонѣ *AC*, уменьшаются сперва постепенно до нѣкотораго предѣла; достигнувъ же его, то-есть наименьшаго своего значенія, положимъ *PQ*, они начинаютъ составлять рядъ возрастающій, такъ что $PQ < N'O' < L'M' < I'K' < \ldots$. И такъ, *первая посылка* не имѣетъ надлежащей полноты; въ ней утверждается только, что двѣ прямыя съ одной стороны всегда приближаются, а съ другой постоянно удаляются другъ отъ друга; но къ этому предположенію необходимо прибавить и приведенный нами сей-часъ случай, когда допускаемъ, что прямыя линіи, начиная отъ нѣкотораго опредѣленнаго, общаго имъ перпендикуляра Ф. 4. *PQ*, расходятся въ обѣ стороны. Доказательство невозможности такого рода *расходимости* прямыхъ въ обѣ стороны и составляетъ, собственно говоря, камень преткновенія въ теоріи паралельныхъ линій.

Послѣ этихъ объясненій можно тотчасъ показать, что доказательство *второй посылки*, предлагаемое Нассиръ-Эддиномъ, Л. I. Ф. 3. теряетъ всю свою силу. Дѣйствительно, раздѣлимъ линію *AB* пополамъ въ точкѣ *Q*, и возставимъ изъ нея перпендикуляръ *QP* къ *AB*. Очевидно, по строенію, что углы *DPQ* и *QPC* будутъ прямые; углы же при *D* и *C*, ясно, равны между собою; слѣдовательно они *равноименные*, то-есть, или оба острые, или оба

тупые. Это замѣчаніе прямо уничтожаетъ заключеніе Нассиръ-Эддина, основанное на *разноименности* упоминаемыхъ угловъ. Кто знакомъ съ теоріею параллельныхъ линій, тотъ знаетъ, что невозможность принимать углы при C и D *тупыми* доказывается совершенно строгимъ образомъ; главное затрудненіе состоитъ въ доказательствѣ того, что эти углы не могутъ быть и *острыми*.

4. Доказательство германскаго математика Клавія, помѣщенное въ изданномъ имъ Эвклидѣ (Франкфуртское изданіе 1507 года, in-8°, въ двухъ томахъ), вовсе не удовлетворяетъ требованіямъ геометрической строгости, ибо основано на началѣ, которое не можетъ быть принято голословно. Клавій допустилъ, что *когда всѣ точки линіи равно удалены отъ прямой, лежащей въ одной съ нею плоскости, то эта линія будетъ прямая.* Упоминаемое свойство прямыхъ такъ же несомнѣнно, какъ и свойство, выражаемое 11-ю Эвклидовою аксіомою; но принять его за исходную точку въ доказательствѣ теоріи параллельныхъ линій, значитъ нисколько не подвинуть впередъ Эвклидова рѣшенія. Прибавимъ къ этому, что нѣкоторыя объясненія, предлагаемыя Клавіемъ для подтвержденія истины, о которой идетъ рѣчь, не имѣютъ никакого значенія въ геометрическомъ смыслѣ.

5. Переходимъ теперь къ доказательству Роберта Симпсона, извѣстнаго и весьма уважаемаго шотландскаго математика. Въ 1756 году онъ издалъ Эвклида, на латинскомъ языкѣ, съ примѣчаніями. Въ этомъ изданіи онъ отзывается объ 11-й аксіомѣ какъ объ истинѣ не въ полной мѣрѣ очевидной и не допускающей *строгаго доказательства.* Въ 1775 году Робертъ Симпсонъ напечаталъ Эвклида на англійскомъ языкѣ, и въ примѣчаніяхъ къ этому творенію помѣстилъ придуманное имъ доказательство предложенія, выражаемаго 11-ю Эвклидовою аксіомою.

Полное изложеніе способа Симпсона читатели найдутъ также въ упомянутомъ выше мемуарѣ Кастилліона (стр. 195 и слѣдующія). Цѣль наша, указать на существенную часть этого способа, и обнаружить его недостаточность, что̀ можетъ быть сдѣлано въ короткихъ словахъ.

Опредѣливъ сперва, что̀ должно разумѣть подъ разстояніемъ точки отъ прямой линіи, также обыкновенное понятіе о сближеніи, удаленіи и равноотстояніи двухъ прямыхъ линій, Симпсонъ предлагаетъ слѣдующую аксіому:

Двѣ прямыя линіи не могутъ сперва приближаться одна къ другой, а потомъ удаляться, не встрѣтясь предварительно. Подобнымъ образомъ, двѣ прямыя не могутъ сперва удаляться одна отъ другой, а потомъ приближаться. Также двѣ прямыя не могутъ быть сперва равноотстоящими, а потомъ удаляться одна отъ другой, или взаимно приближаться, ибо прямая линія имѣетъ всегда одно и то же направленіе.

Эта аксіома въ сущности не отличается отъ *первой посылки* Нассиръ-Эддина. Различіе между ними состоитъ только въ формѣ изложенія.

Вслѣдъ за *аксіомою*, Симпсонъ доказываетъ слѣдующее предложеніе:

Л. I. Ф. 5. *Когда концы C и D двухъ равныхъ прямыхъ линій AC и BD, перпендикулярныхъ къ AB, будутъ соединены прямою CD, то всякій перпендикуляръ EF, возставленный изъ E къ AB, и ограниченный прямою CD, будетъ равенъ линіи AC или BD.*

Въ самомъ дѣлѣ, если линія EF не равна AC, то одна изъ нихъ будетъ болѣе другой; допустимъ, напримѣръ, что $AC > EF$. Такъ какъ перпендикуляръ EF менѣе перпендикуляра AC, то прямая CFD ближе къ AB въ точкѣ F нежели въ точкѣ C; то-есть, прямая CF приближается къ прямой AB при переходѣ отъ точки C къ точкѣ F. Но, съ другой стороны, какъ перпендикуляръ BD больше перпендикуляра EF, то прямая FD болѣе удалена отъ прямой AB въ точкѣ D, нежели въ точкѣ F; то-есть, прямая FD удаляется отъ прямой AB, когда идемъ отъ точки F къ точкѣ D. Слѣдовательно прямая CFD сперва приближается, а потомъ удаляется отъ прямой AB, не пересѣкая ея въ промежуткѣ, а это невозможно въ силу приведенной выше аксіомы.

Совершенно подобнымъ образомъ докажется невозможность предположенія $EF > AC$.

Слѣдовательно, перпендикуляръ EF ни меньше, ни больше прямой AC или BD, а поэтому равенъ каждой изъ этихъ линій, что̀ и надлежало доказать.

Выведенная теорема выражаетъ отличительное свойство параллельныхъ линій; но аксіома, на которой основано ея доказательство, не можетъ быть допущена. Дѣйствительно, мы уже видѣли въ n⁰ 3, что строгость геометрическая требуетъ, чтобы при разсматриваніи взаимнаго положенія двухъ прямыхъ линій на плоскости, не упускали изъ виду того случая, когда эти прямыя сперва приближаются, а потомъ удаляются одна отъ другой, чего не сдѣлалъ Робертъ Симпсонъ въ своей аксіомѣ. Вотъ почему предложенный имъ способъ, подобно другимъ, принадлежитъ къ числу неудовлетворительныхъ.

Переходимъ теперь къ новѣйшимъ опытамъ строгаго доказательства теоріи параллельныхъ линій. Болѣе другихъ математиковъ обратили на нее вниманіе Бертранъ *) изъ Женевы, и въ особенности Лежандръ. Доказательства ихъ вошли во многіе курсы Геометріи. При полномъ уваженіи къ авторитету этихъ двухъ именъ, и въ особенности къ имени знаменитаго французскаго геометра, я позволю себѣ однакожъ предложить нѣкоторыя замѣчанія, и даже сомнѣнія, на счетъ строгости ихъ пріемовъ. Начнемъ съ способовъ Бертрана.

6. Бертранъ, основываясь на разсматриваніи безконечныхъ пространствъ, показалъ, что если прямая BD перпендикулярна къ AB, то третья линія AE, составляющая острый уголъ съ AB, будучи достаточно продолжена, пересѣчетъ перпендикуляръ BD. Для доказательства, онъ возставляетъ перпендикуляръ AC къ AB, и повторяетъ уголъ CAE столько разъ, сколько нужно для того, чтобъ полученный кратный уголъ былъ равенъ прямому углу, или превосходилъ его. Такъ, на *фигурѣ 6*, учетверенный уголъ, именно уголъ CAE''', удовлетворяетъ условію, ибо превышаетъ уголъ прямой. Отложивъ потомъ $BB'=B'B''=B''B'''=AB$, и возставивъ перпендикуляры $B'D'$, $B''D''$, $B'''D'''$, получатся четыре равные двуугольника $CABD, DBB'D', D'B'B''D''$ и $D''B''B'''D'''$. На основаніи такого построенія, сужденіе Бертрана приводится къ слѣдующему: если допустимъ, что наклонная AE не пересѣкаетъ перпендикуляра BD, то изъ этого должно будетъ заключить, что неопредѣленное пространство угла CAE меньше

Л. I. Ф. 6.

*) Бертранъ (*Bertrand*) издалъ весьма основательную книгу подъ заглавіемъ: *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques*, 1778 г.

неопредѣленнаго же пространства двуугольника $CABD$; слѣдовательно пространство CAE''', равное учетверенному углу CAE, который по предположенію больше прямаго угла, должно быть меньше неопредѣленнаго пространства $CAB'''D'''$, изображающаго учетверенный двуугольникъ $CABD$. Но второе пространство $CAB'''D'''$ заключено въ первомъ CAE''', и даже можетъ вмѣститься въ немъ безконечное число разъ, почему $CAB'''D''' < CAE'''$; отсюда прямо заключаемъ, что пространство угла CAE больше пространства двуугольника $CABD$. И такъ, допущенное предположеніе несправедливо, и сторона AE угла BAE, будучи достаточно продолжена, непремѣнно выйдетъ изъ двуугольника $CABD$, или, иначе: наклонная AE всегда пересѣчетъ гдѣ-нибудь перпендикуляръ BD.

Противъ этого доказательства, которое считали совершенно строгимъ, можно однакожъ, по нашему мнѣнію, сдѣлать возраженіе. Дѣйствительно, оно окончательно основано на томъ началѣ, что *изъ двухъ неопредѣленныхъ пространствъ, объемлемое менѣе объемлющаго*. Эта аксіома, конечно, не подлежитъ ни малѣйшему сомнѣнію, когда рѣчь идетъ о пространствахъ ограниченныхъ; но намъ кажется, что та же истина, въ отношеніи къ пространствамъ безконечнымъ, далеко не имѣетъ равной степени очевидности. Покажемъ это на самомъ дѣлѣ; и во-первыхъ замѣтимъ, что допустивъ аксіому для безконечныхъ пространствъ, можно значительно упростить доказательство Бертрана, и приложить его сужденіе непосредственно къ 11-й Эвклидовой аксіомѣ слѣдующимъ образомъ:

Л. I. Ф. 7. Пусть будутъ двѣ прямыя AC и BD, пересѣченныя третею AB такъ, что сумма внутреннихъ угловъ CAB и ABD менѣе двухъ прямыхъ. Надобно доказать, что прямыя AC и BD, достаточно продолженныя, пересѣкутся. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сумма двухъ смежныхъ угловъ ABD и DBE равна двумъ прямымъ, то уголъ DBE будетъ болѣе угла CAB; слѣдовательно, неопредѣленное пространство CAE будетъ менѣе неопредѣленнаго пространства DBE. Отсюда прямо заключаемъ, что уголъ DBE не можетъ вмѣщаться въ углѣ CAE, почему прямая AC, по достаточномъ ея продолженіи, должна пересѣчь линію BD.

Какъ бы это заключеніе съ перваго взгляда не казалось естественнымъ, можно однакожъ предложить сомнѣнія на счетъ безусловной его строгости. Пусть будетъ *AMC* кривая линія, имѣющая прямолинейную ассимптоту *BD*, перпендикулярную къ *AE*. При такомъ условіи казалось бы очевиднымъ, что безконечное пространство *CAE* *болѣе* объемлемаго имъ пространства прямаго угла *DBE*. Съ другой стороны, если изъ точки *A* возставимъ къ *AE* перпендикуляръ *AF*, то заключимъ, на томъ же основаніи какъ и прежде, что то́ самое пространство *CAE*, вмѣщающееся теперь въ прямомъ углѣ *FAE*, *менѣе* сего послѣдняго. Такимъ образомъ мы приведены къ двумъ противорѣчащимъ одно другому заключеніямъ, именно, что безконечное пространство *CAE*, въ одно время, и болѣе и менѣе прямаго угла. Принимая въ соображеніе такую неопредѣлительность получаемыхъ результатовъ, мы полагаемъ, что едва-ли можно согласить употребленіе приведеннаго сей-часъ пріема съ требованіями простоты, ясности и строгости геометрической. Л. I. Ф. 8.

Мы знаемъ, что приведенное нами противорѣчіе на самомъ дѣлѣ не существуетъ, и объясняется тѣмъ, что площадь двуугольника *FABD*, какъ безконечная величина перваго порядка, должна быть откинута предъ безконечнымъ пространствомъ прямаго угла *DBE* или *FAE*, который изображаетъ безконечно большую величину втораго порядка. Но, спрашивается, наше возраженіе не сильнѣе-ли подѣйствуетъ на умы приступающихъ къ изученію Геометріи, чѣмъ отвлеченныя объясненія, основанныя на разсматриваніи безконечныхъ величинъ разныхъ порядковъ, еще новыхъ для начинающихъ, или о которыхъ они имѣютъ развѣ только самыя сбивчивыя и темныя понятія? Въ n° 13 мы предложимъ еще нѣкоторыя соображенія по этому самому предмету.

3. Предлагаемое Бертраномъ доказательство теоремы о суммѣ трехъ угловъ треугольника очень просто, и можетъ показаться болѣе удовлетворительнымъ. Пусть будетъ *ABC* разсматриваемый треугольникъ, *A*, *B*, *C* его углы, и ω его площадь; продолжимъ сторону *AC* къ C', *CB* къ B', *BA* къ A'. Очевидно, что совокупность трехъ угловъ $A'AC'$, $C'CB'$, $B'BA'$, вмѣстѣ съ площадью ω, займетъ всю плоскость, на которой лежитъ тре- Л. I. Ф. 9.

угольникъ ABC; слѣдовательно эта сумма будетъ равна четыремъ прямымъ угламъ. И такъ, означивъ чрезъ d прямой уголъ, получимъ

$$\text{уг. } A'AC' + \text{уг. } C'CB' + \text{уг. } B'BA' + \omega = 4d,$$

откуда

$$\text{уг. } A'AC' + \text{уг. } C'CB' + \text{уг. } B'BA' = 4d - \omega.$$

Но, съ другой стороны, имѣемъ

$$\text{уг. } A = 2d - \text{уг. } A'AC'$$
$$\text{уг. } B = 2d - \text{уг. } B'BA'$$
$$\text{уг. } C = 2d - \text{уг. } C'CB'.$$

Взявъ сумму, получимъ

$$A + B + C = 6d - (\text{уг. } A'AC' + \text{уг. } B'BA' + \text{уг. } C'CB');$$

наконецъ, внеся на мѣсто послѣдней суммы равную ей величину $4d - \omega$, будетъ

$$A + B + C = 2d + \omega.$$

Такъ какъ площадь ω есть величина *конечная*, а количество $2d$, изображающее два прямые угла, или половину неопредѣленной плоскости, величина *безконечно большая*, то ω можетъ быть откинуто предъ $2d$, и получится просто $A + B + C = 2d$.

Это доказательство убѣдительнѣе для начинающихъ, чѣмъ предъидущее: они скорѣе поймутъ, что количество конечное, именно площадь треугольника, можетъ быть откинута предъ пространствомъ безконечнымъ, измѣряемымъ двумя прямыми углами, то-есть предъ безконечно большою величиною втораго порядка. Однакожъ, и этотъ пріемъ подаетъ поводъ къ возраженіямъ подобнымъ тѣмъ, какимъ подвергся предъидущій. Покажемъ это упростивъ еще доказательство Бертрана. Пусть
Л. I. данный треугольникъ будетъ ABC; продолживъ стороны его
Ф. 10. AC, AB, BC, получимъ неопредѣленно-продолженныя линіи AG, AF, BD и CE. Уголъ при A треугольника будетъ измѣряться неопредѣленнымъ пространствомъ FAG, уголъ при B пространствомъ DBF, наконецъ уголъ при C неопредѣленнымъ пространствомъ ECG; слѣдовательно, сумма трехъ угловъ A, B, C даннаго треугольника изобразится безконечнымъ пространствомъ $DBACE$, то-есть двумя прямыми углами съ присовокупленіемъ

къ нимъ площади ω самаго треугольника ABC. Но какъ эта площадь есть величина конечная, то и должна быть откинута предъ безконечно большою величиною втораго порядка, выражаемою двумя прямыми углами. И такъ, сумма трехъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.

Мы возразимъ противъ этого доказательства, что измѣнивъ только построеніе, получится слѣдствіе, какъ бы противорѣчащее найденному. Дѣйствительно, проведемъ произвольно линію AH внутри треугольника ABC, и возьмемъ на этой прямой точку Ф. 10. N на какомъ угодно разстояніи отъ вершины A. Чрезъ эту точку N проведемъ двѣ прямыя NI и NK такъ, чтобы уголъ INH равнялся углу FAN, а уголъ KNH углу GAN; ясно, что уголъ KNI будетъ равенъ углу A даннаго треугольника. Слѣдовательно, при такомъ построеніи, сумма $A + B + C$ трехъ угловъ измѣряется совокупностію трехъ безконечныхъ пространствъ DBF, ECG и KNI, и эти три пространства, взятыя вмѣстѣ, очевидно меньше двухъ прямыхъ угловъ, считаемыхъ, какъ и прежде, подъ прямою DE. Новое значеніе суммы трехъ угловъ треугольника оказывается меньшимъ прежденайденнаго на безконечное пространство фигуры $KNIFAG$, которая сама разлагается на два двуугольника $FANI$ и $GANK$; площади этихъ двуугольниковъ могутъ быть увеличены по произволенію чрезъ удаленіе точки N отъ A. И такъ, мы снова приведены къ противорѣчію, ибо нашли прежде, что искомая сумма $A + B + C$ *болѣе* двухъ прямыхъ угловъ, а теперь показали, что та же сумма *менѣе* двухъ прямыхъ угловъ, считаемыхъ въ обоихъ случаяхъ подъ прямою DE. Здѣсь мы видимъ, что самый избытокъ двухъ прямыхъ угловъ предъ суммою $A + B + C$ есть пространство безконечно большое. Такое противорѣчіе, безъ сомнѣнія, объясняется свойствомъ безконечно большихъ величинъ различныхъ порядковъ; но неоспоримо также, что подобнаго рода объясненія, по сущности своей, не могутъ войти въ Начальную Геометрію. По нашему мнѣнію, не легко будетъ объяснить начинающимъ, что хотя пространство, заключенное въ двухъ двуугольникахъ $FANI$ и $GANK$, можетъ быть увеличено по произволенію чрезъ удаленіе точки N отъ вершины A, тѣмъ не менѣе однакожъ это пространство нисколько не уменьшитъ безконечнаго же простран-



ства, измѣряемаго двумя прямыми углами, считая послѣдніе подъ прямою линіею DE.

Впрочемъ, основываясь на выведенныхъ сей-часъ двухъ противорѣчивыхъ слѣдствіяхъ относительно суммы угловъ треугольника, можно придать болѣе строгій видъ изложенному доказательству. Въ самомъ дѣлѣ, означивъ чрезъ d прямой уголъ, первое слѣдствіе приведетъ къ неравенству

$$A + B + C > 2d,$$

а второе, напротивъ того, къ слѣдующему:

$$A + B + C < 2d.$$

Чтобъ согласить эти два условія между собою, необходимо принять

$$A + B + C = 2d,$$

въ чемъ и состоитъ доказываемая теорема.

8. Переходимъ теперь къ трудамъ Лежандра. Можно утвердительно сказать, что ни одинъ математикъ не приложилъ столько стараній для усовершенствованія теоріи параллельныхъ линій, какъ Лежандръ. Особенная заботливость придать своимъ доказательствамъ возможную степень простоты и строгости явно обнаруживается въ многочисленныхъ изданіяхъ его Геометріи, и наконецъ въ обширномъ мемуарѣ *), исключительно посвященномъ этому вопросу.

Въ первомъ изданіи Геометріи Лежандра (1794 г.) находимъ доказательство предложенія о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ. Но этотъ первый опытъ не былъ удовлетворителенъ со стороны геометрической строгости; приведемъ его въ короткихъ словахъ.

Л. I. Ф. 11. Положимъ, что прямыя BD и AE перпендикулярны къ LI, а AC составляетъ съ LI острый уголъ IAC; для доказательства, что AC, по достаточномъ продолженіи, пересѣчетъ BD, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ какой ни есть точки F прямой AC опускаемъ перпендикуляръ FG на AB; точка G не можетъ падать въ A по той причинѣ, что уголъ BAF не прямой;

*) Legendre: *Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles* (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Tome XII, 1833).

она также не можетъ падать по лѣвую сторону точки *A*, напримѣръ въ *H*, потому что въ такомъ предположеніи изъ точки *K*, въ которой *FH* пересѣкается съ *AE*, можно бы было опустить два перпендикуляра *KA* и *KH* на прямую *LI*. Слѣдовательно, основаніе *G* перпендикуляра *FG* упадетъ по правую сторону *A*, то есть въ какую нибудь точку линіи *AI*. Совершенно подобнымъ образомъ докажется, что взявъ на прямой *AC* другія, дальнѣйшія отъ *A* точки *C*, *P* и проч., основанія *M*, *N*.... перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нихъ на *LI*, будутъ болѣе и болѣе удаляться отъ *A*. Далѣе Лежандръ заключаетъ, что было бы *несообразно допустить существованіе предѣла, далѣе котораго разстояніе основанія M перпендикуляра отъ точки A не увеличивается.* Ибо, говоритъ онъ, если положимъ, что *CM* есть послѣдній или отдаленнѣйшій отъ *A* перпендикуляръ, то взявъ на продолженіи *AC* точку *P*, основаніе *N* перпендикуляра *PN* должно упасть дальше отъ *A*, нежели основаніе *M* перпендикуляра *CM*, а это самое противорѣчитъ положенію, въ слѣдствіе котораго *CM* есть отдаленнѣйшій отъ *A* перпендикуляръ.

Несообразность, на которой Лежандръ основываетъ свое доказательство, вовсе не существуетъ. Дѣйствительно, если вообразимъ, что вмѣсто наклонной *AC* разсматривается кривая линія $AF'C'P'$, напримѣръ иперболa, имѣющая ассимптотою своей Ф. 11.
прямую $B'D'$, перпендикулярную къ *AB*, и поэтому параллельную *BD*, то основанія *G*, *M*, *N*.... перпендикуляровъ $F'G$, $C'M$, $P'N$.... будутъ неопредѣленно приближаться къ точкѣ B', удаляясь отъ *A*, и между тѣмъ никакъ не перейдутъ за B'. Спрашивается теперь, почему прямая линія *AC* не можетъ находиться, въ отношеніи къ предѣльной точкѣ B', точно въ такихъ обстоятельствахъ, какъ и кривая линія $AF'C'P'$? Слѣдовательно, предположеніе Лежандра о существованіи *послѣдняго перпендикуляра* принято быть не можетъ. Вмѣсто него должно допустить существованіе такой предѣльной точки B', что возставленный изъ нея перпендикуляръ $B'D'$ къ *AB* будетъ первымъ, не пересѣкающимъ продолженной наклонной линіи *AC*; но не видно, какое дальнѣйшее заключеніе можно вывести изъ этого предположенія. Впрочемъ, не прибѣгая даже къ объясненію посредствомъ иперболы, достигаемъ того самаго результата замѣтивъ,

что отвергающій справедливость доказательства въ правѣ возразить, что безконечный рядъ величинъ *AG*, *GM*, *MN*.... можетъ имѣть сумму конечную, какъ напримѣръ слѣдующій:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots = 1,$$

каковъ бы ни былъ притомъ рядъ соотвѣтственныхъ на наклонной *AC* линій *AF*, *FC*, *CP*....

9. Академикъ Гурьевъ, въ своемъ весьма основательномъ *Опытѣ о усовершеніи елементовъ Геометріи*, изданномъ въ 1798 году, справедливо указалъ на неточность приведеннаго сей-часъ доказательства (стр. 189 и 190), и, въ замѣнъ его, предложилъ собственное, которое считалъ совершенно строгимъ. Мы покажемъ, что авторъ *Опыта* впалъ въ ту самую погрѣшность какъ и Лежандръ, почему доказательство его никакъ не можетъ быть допущено. Вотъ пріемъ, употребленный Гурьевымъ:
Л. I. Ф. 12. предположивъ, какъ выше, что прямая *BD* перпендикулярна къ *AB*, а *AC* наклонна къ ней, опускаемъ на *AB* перпендикуляры *EP*, *FQ* и проч. изъ разныхъ точекъ *E*, *F*.... прямой *AC*; докажется, какъ выше, что основанія *P*, *Q*.... всѣхъ этихъ перпендикуляровъ будутъ падать по правую сторону точки *A*. И наоборотъ: если изъ точекъ *P*, *Q*..., а также изъ взятыхъ между ними *R*, *S*..., возставимъ къ *AB* перпендикуляры PE', QF'.... и *RG*, *SH*...., то первые совмѣстятся съ перпендикулярами *EP*, *FQ*..., прежде опущенными, и поэтому пересѣкутъ прямую *AC* въ точкахъ *E*, *F*...; такъ какъ вторые перпендикуляры, именно *RG*, *SH*...., находятся въ опредѣленныхъ пространствахъ *AEP*, *PEFQ*...., то выходя изъ нихъ, они, подобно первымъ, пересѣкутъ наклонную *AC*, положимъ въ точкахъ G', H'.... Этимъ самымъ обнаруживается существованіе безконечнаго множества такихъ перпендикуляровъ, которые, будучи возставлены изъ точекъ прямой *AZ*, пересѣкутъ наклонную *AC*. За симъ авторъ заключаетъ, что нѣтъ ни одного перпендикуляра къ *AB*, между *A* и *Z* возставленнаго, который не пересѣкъ бы наклонной *AC*. Дѣйствительно, говоритъ онъ, въ противномъ случаѣ надлежало бы допустить, что изъ упоминаемыхъ перпендикуляровъ нѣкоторые пересѣкаются съ *AC*, а другіе не пересѣкаются, и что слѣдовательно существуетъ *общій предѣлъ, гдѣ одни перпендику-*

ляры кончаются, а другіе начинаются; отвергая же существованіе такого предѣла, оказалось бы, что всѣ перпендикуляры пересѣкаютъ *AC*, а это противно дѣлаемому теперь предположенію. И такъ, пусть будетъ *TK* предѣльный или послѣдній перпендикуляръ, пересѣкающій *AC*; взявъ на *AC* точку *L* за точкою *K*, и опустивъ изъ нея на *AB* перпендикуляръ *LU*, окажется, что этотъ новый перпендикуляръ отстоитъ далѣе отъ *A* нежели предшествующій *TK*; слѣдовательно *TK* нельзя считать предѣльнымъ перпендикуляромъ. Отсюда заключаемъ, что допущенный сей-часъ предѣлъ не существуетъ, и что всѣ перпендикуляры, возставленные изъ точекъ неопредѣленной прямой *AZ*, пересѣкаются съ наклонною *AC*, въ чемъ и состоитъ доказываемое предложеніе.

Въ подчеркнутыхъ нами собственныхъ словахъ Гурьева: *общій предѣлъ, гдѣ одни перпендикуляры кончаются, а другіе начинаются* (стр. 237), заключается незамѣченный имъ паралогизмъ. Онъ не обратилъ вниманія на то обстоятельство, что предѣлъ относительно перпендикуляровъ пересѣкающихся съ наклонною, и предѣлъ относительно непересѣкающихся перпендикуляровъ, не должно принимать въ одномъ и томъ же значеніи. Дѣйствительно, разсуждая въ смыслѣ возражающаго, мы скажемъ, что пересѣкающіеся перпендикуляры *никогда не достигаютъ предполагаемаго предѣла, хотя и приближаются къ нему неопредѣленно*, а непересѣкающіеся, напротивъ того, *непосредственно начинаются съ него*. Чтобы придать различію между этими двумя понятіями о предѣлѣ совершенную очевидность, представимъ себѣ кривую *AMC*, имѣющую прямолинейную ассимптоту *BD*, перпендикулярную къ *AZ*. Ясно, что какъ бы близко не брали точки n, n', n'', n'''.... съ лѣвой стороны отъ *B*, перпендикуляры, возставленные изъ нихъ, пересѣкутъ кривую *AMC* по извѣстному свойству ассимптоты. Но можемъ-ли указать на *послѣдній пересѣкающій перпендикуляръ*? Безъ сомнѣнія не можемъ; между тѣмъ знаемъ, что первый, *непересѣкающій кривую перпендикуляръ*, будетъ *BD*. Такъ какъ авторъ разбираемаго доказательства не отличилъ въ своемъ пріемѣ никакимъ особеннымъ признакомъ прямой линіи отъ кривой, обращенной выпуклостію своею къ

Л. I. Ф. 13.

перпендикуляру BD, то и не имѣлъ права допустить существо-
Ф. 12. ваніе предѣльнаго пересѣкающаго перпендикуляра TK.

10. Недовольный доказательствомъ, помѣщеннымъ въ 1-мъ изданіи своей Геометріи, Лежандръ придумалъ другое, весьма остроумное, которое вошло въ шесть послѣдовательныхъ изданій его книги, начиная съ 3-го и до 8-го включительно. Предлагаемъ изложеніе способа, о которомъ говоримъ, чтобы потомъ удобнѣе было видѣть, какому возраженію онъ подаетъ поводъ.

Доказавъ предварительно, и совершенно строго, что сумма трехъ угловъ треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ, Лежандръ поступаетъ слѣдующимъ образомъ для доказательства, что эта сумма не можетъ быть и менѣе двухъ прямыхъ (изданіе 7-е, стр. 21):

Л. I.
Ф. 14. «Пусть будетъ ABC данный треугольникъ, и положимъ, если возможно, что сумма его угловъ $= 2P - Z$, разумѣя подъ P прямой уголъ, а подъ Z нѣкоторое количество, изображающее избытокъ двухъ прямыхъ угловъ предъ суммою $A + B + C$ угловъ треугольника.

«Пусть будетъ A мѐньшій изъ угловъ треугольника ABC; построимъ на сторонѣ BC, лежащей противъ него, уголъ $BCD = ABC$ и уголъ $CBD = ACB$; два треугольника BCD, ABC будутъ равны, ибо имѣютъ общую сторону BC и равные прилежащіе къ ней углы. Чрезъ точку D проведемъ произвольную прямую EF, пересѣкающую въ E и F продолженныя стороны угла A*).

«Такъ какъ сумма угловъ въ каждомъ изъ двухъ треугольниковъ ABC, BCD, равна $2P - Z$, а сумма угловъ каждаго треугольника EBD, DCF не можетъ превышать $2P$, то изъ этого слѣдуетъ, что сумма угловъ четырехъ треугольниковъ ABC, BCD, EBD, DCF не превзойдетъ $4P - 2Z + 4P = 8P - 2Z$. Если отъ этой суммы отнимемъ сумму смежныхъ угловъ при B, C, D, очевидно равную $6P$, то остатокъ изобразитъ сумму

---

*) «Мы предполагаемъ, что A есть мѐньшій уголъ въ треугольникѣ ABC, и что поэтому онъ меньше, или по крайней мѣрѣ не больше двухъ третей прямаго угла; такое построеніе допускается съ тою цѣлію, чтобы придать болѣе очевидности встрѣчѣ прямой, которую проводимъ чрезъ точку D, съ продолженными сторонами AB и AC этого самаго угла A.»

угловъ треугольника AEF; слѣдовательно, сумма угловъ треугольника AEF не превзойдетъ $2P-2Z$.

«И такъ, если къ суммѣ угловъ треугольника ABC надобно прибавить Z чтобъ составить два прямые угла, то къ суммѣ угловъ треугольника AEF придется прибавить по крайней мѣрѣ $2Z$ для полученія тѣхъ же двухъ прямыхъ угловъ.

«Подобнымъ образомъ, посредствомъ треугольника AEF можно построить третій треугольникъ такой, что къ суммѣ трехъ его угловъ надобно будетъ прибавить по крайней мѣрѣ $4Z$ чтобъ получить два прямые угла; отъ третьяго треугольника перейдемъ къ четвертому такому, что сумма его угловъ будетъ по крайней мѣрѣ на $8Z$ менѣе двухъ прямыхъ, и такъ далѣе.

«Но, замѣтимъ, что какъ бы мала не была величина Z въ разсужденіи прямаго угла P, послѣдовательные члены Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ и проч., увеличивающіеся въ удвоенномъ содержаніи, достигнутъ наконецъ величины $2P$, и потомъ превзойдутъ ее. Тогда дойдемъ до такого треугольника, что къ суммѣ угловъ его надобно будетъ прибавить количество $2P$, или еще больше, чтобъ получить $2P$. Несообразность этого слѣдствія очевидно показываетъ, что сдѣланное предположеніе не можетъ быть допущено, то есть нельзя принять, чтобы сумма угловъ треугольника ABC была менѣе двухъ прямыхъ; а какъ она притомъ не можетъ быть и болѣе, то заключаемъ, что она, въ строгомъ смыслѣ, равна двумъ прямымъ угламъ.»

Въ этомъ доказательствѣ допускается, какъ видно изъ приведеннаго изложенія, что изъ точки D, взятой внутри угла не- Ф. 14. превышающаго двухъ третей прямаго, всегда можно провести прямую EDF, пересѣкающую, въ одно время, обѣ стороны угла A. Въ оправданіе этого произвольнаго допущенія или леммы и состоитъ собственно главное затрудненіе. Правда, Лежандръ, въ томъ же 7-мъ изданіи (примѣчаніе 2-е, стр. 280), предлагаетъ объясненіе, имѣющее цѣлію придать болѣе очевидности сказанному свойству; но его объясненіе не удовлетворитъ того, кто желаетъ достигнуть безусловной строгости. Приводимъ сужденіе Лежандра:

«Возьмемъ равныя части на двухъ сторонахъ угла A, и со-

Л. I. Ф. 15. единимъ потомъ равноудаленныя отъ A точки M и N, M' и N', M'' и N'' и проч. прямыми MN, $M'N'$, $M''N''$....; *ясно, что эти линіи будутъ все болѣе и болѣе удаляться отъ точки A, и что наконецъ ихъ разстояніе отъ нея сдѣлается болѣе всякой данной величины.* Слѣдовательно, между этими прямыми найдется такая $M'N'$, которая перейдетъ за точку D, и тогда, соединивъ N' съ D, получимъ искомую прямую $N'DE$.»

Заключеніе о существованіи прямой $M'N'$, переходящей за точку D, бездоказательно. И въ самомъ дѣлѣ, какъ отвѣчать на возраженіе, что линіи, соединяющія M' съ N', M'' съ N'' и проч. пойдутъ по $M'PN'$, $M''P'N''$...., оставляя всегда точку D внѣ площади получаемыхъ треугольниковъ $AM'N'$, $AM''N''$....

Чтобы показать еще съ бо́льшею разительностію недостаточность объясненія Лежандра, замѣнимъ въ фигурѣ 15-й (листъ I) прямолинейныя стороны угла A двумя равными вѣт-
Л. I. Ф. 16. вями AB и AC кривой линіи, имѣющими общую ассимптоту PQ. Соединивъ, по прежнему, равноудаленныя отъ A точки M и N, M' и N', M'' и N''.... прямыми MN, $M'N'$, $M''N''$...., мы повторимъ слова Лежандра: *ясно, что линіи MN, $M'N'$, $M''N''$.... будутъ все болѣе и болѣе удаляться отъ точки A, и что наконецъ ихъ разстояніе отъ нея сдѣлается болѣе всякой данной величины.* Но очевидно, что въ настоящемъ случаѣ сказанное нами совершенно ошибочно; разстояніе, о которомъ говорится здѣсь, не можетъ быть сдѣлано болѣе всякой данной величины, а, напротивъ того, имѣетъ предѣломъ величину конечную, именно длину перпендикуляра AI, опущеннаго изъ точки A на ассимптоту PQ. Поэтому, заключеніе будетъ справедливо только для точекъ, находящихся между вѣтвями и ассимптотою, а для точекъ, взятыхъ по ту сторону ассимптоты, оно уже не имѣетъ мѣста; прямая, проведенная напримѣръ чрезъ точку D', можетъ пересѣкать только одну вѣтвь, или ни одной: она пересѣчетъ одну вѣтвь, когда будетъ наклонна къ ассимптотѣ, какъ FG, а ни одной, если параллельна къ ней, какъ HK. Изъ сказаннаго видимъ, что свойство, допущенное Лежандромъ въ разсужденіи прямолинейнаго угла, не всегда справедливо для криволинейнаго. Лежандръ, въ сужденіяхъ своихъ, не выразилъ никакимъ особеннымъ признакомъ прямолинейности сторонъ угла: поэто-

му заключеніе его имѣли бы право отнести и къ углу криволинейному; съ другой же стороны, такъ какъ оно въ послѣднемъ случаѣ оказывается сомнительнымъ, то и *лемма* его, при строгомъ воззрѣніи на предметъ, не можетъ быть допущена.

Въ 12-мъ изданіи своей Геометріи, Лежандръ предложилъ другую попытку для устраненія упоминаемаго затрудненія. Пріемъ его основанъ на аксіомѣ, состоящей въ томъ, что *прямая линія раздѣляетъ неопредѣленную плоскость на двѣ равныя части;* но такъ какъ при этомъ ему приходится сравнивать между собою безконечныя протяженія, то доказательство его, по нашему мнѣнію, подаетъ поводъ къ возраженіямъ точно такого рода, какія приведены въ n^0n^0 6, 7 и 13, почему мы и не будемъ останавливаться на его разборѣ.

11. На основаніи сказаннаго въ предъидущемъ n^0 10, легко отъ двухъ предложеній е (1-го и 3-го рода, n^0 1) перейти къ одному изъ общеизвѣстныхъ свойствъ параллельныхъ линій. Покажемъ, напримѣръ, что изъ обоихъ предложеній можно вывести основную теорему о суммѣ угловъ треугольника. Начнемъ съ предложенія е, которое относится къ *3-му роду*, и выражаетъ слѣдующее свойство:

При данномъ остромъ углѣ можно построить такой прямоугольный треугольникъ, что сторона его, прилежащая къ этому углу и къ углу прямому, будетъ какъ угодно велика.

Пусть будетъ A данный острый уголъ, какъ бы онъ впрочемъ малъ не былъ. Въ силу допускаемаго свойства можно построить прямоугольный треугольникъ ABC, съ произвольнымъ катетомъ AB. Обратимъ этотъ треугольникъ около другаго его катета CB; получимъ треугольникъ CBB' равный CBA; изъ точки B' возставимъ перпендикуляръ къ AB', который, въ силу условія относительно произвольной величины катета, встрѣтитъ продолженную сторону AC угла A; пусть будетъ $AB'C'$ новый треугольникъ. Обратимъ его около катета $C'B'$; получимъ треугольникъ $C'B'B''$ равный $C'B'A$; изъ точки B'' возставимъ перпендикуляръ $B''C''$ къ AB''; составится третій прямоугольный треугольникъ $AB''C''$. Такъ какъ это построеніе можетъ быть повторено произвольное число разъ, то и получимъ неограниченное число прямоугольныхъ треугольниковъ ABC, $AB'C'$,

Л. I. Ф. 17.

$AB''C''$...., имѣющихъ общій острый уголъ A. Основываясь на такомъ построеніи, и принявъ за доказанное, что сумма угловъ какого ни есть треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ, мы покажемъ, что она не можетъ быть и менѣе этой величины для треугольника ABC. Положимъ $A+B+C=S$, $A+B'+C'=S'$, $A+B''+C''=S''$...., и означимъ, какъ въ предъидущемъ n^0 10, чрезъ Z избытокъ двухъ прямыхъ угловъ предъ суммою S, а чрезъ P прямой уголъ; получимъ $S=2P-Z$. Замѣтимъ теперь, что треугольникъ $AB'C'$ состоитъ изъ трехъ треугольниковъ, именно изъ $CC'B'$ и изъ двухъ равныхъ между собою ABC, $B'BC$; сумма угловъ послѣднихъ двухъ будетъ $4P-2Z$, а сумма угловъ треугольника $CC'B'$ не болѣе $2P$. Слѣдовательно, сумма угловъ всѣхъ трехъ разсматриваемыхъ треугольниковъ не превзойдетъ $6P-2Z$; вычтемъ изъ этой величины сумму смежныхъ угловъ при B и C, очевидно равную $4P$; остатокъ $2P-2Z$ изобразитъ бóльшій предѣлъ суммы угловъ прямоугольнаго треугольника $AB'C'$. И такъ

$$S' \leqq 2P-2Z.$$

Далѣе, принявъ въ разсмотрѣніе треугольникъ $AB''C''$, который составленъ изъ треугольника $C'C''B''$ и двухъ равныхъ между собою $AB'C'$ и $B''B'C'$, получимъ совершенно подобнымъ образомъ

$$S'' \leqq 2P-4Z.$$

Четвертый треугольникъ доставилъ бы неравенство

$$S''' \leqq 2P-8Z,$$

и такъ далѣе. Если примемъ въ соображеніе, что при каждомъ пріемѣ величина, вычитаемая изъ $2P$, будетъ удвоиваться, то прямо заключимъ о невозможности допущенія какой либо разности Z между S и $2P$. Дѣйствительно, какъ бы эта разность Z не была мала, но въ ряду Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$... вычитаемыхъ количествъ найдутся наконецъ члены, превышающіе $2P$, и тогда получится для суммы угловъ треугольника величина отрицательная, чтò невозможно. Слѣдовательно $S=A+B+C=2P$, каковъ бы не былъ данный острый уголъ A, и какъ бы катетъ AB не предполагался большимъ. Въ n^0 20 будетъ показано, ка-

кимъ образомъ это свойство, относящееся къ прямоугольному треугольнику при данномъ остромъ углѣ, распространяется на какой ни есть треугольникъ.

Предложенiе e *1-го рода* (n^0 1) приводится очень просто къ разсмотрѣнному сей-часъ случаю. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ *AL* и *BM* двѣ линiи, параллельныя между собою, а *AB* их основанiе произвольной величины. Отложимъ по *BM* часть $BC = AB$, и возставимъ изъ *C* перпендикуляръ *CD* къ линiи *BM*; этотъ перпендикуляръ, въ силу *предложенiя*, о которомъ идетъ рѣчь, пересѣчетъ другую параллельную линiю *AL*, положимъ въ точкѣ *D*. Соединивъ потомъ *B* и *D* прямою *BD*, получатся два прямоугольные треугольника *ABD* и *CBD*, равные между собой, потому что они имѣютъ общую гипотенузу *BD*, и, сверхъ того, катетъ *AB* одного изъ нихъ, равенъ катету *BC* другаго. Отсюда заключаемъ, что углы *DBA* и *DBC* равны; поэтому каждый изъ нихъ равенъ половинѣ прямаго угла. Такимъ образомъ мы получили прямоугольный треугольникъ *BAD*, имѣющiй при *B* уголъ равный половинѣ прямаго, и, сверхъ того, произвольной величины катетъ *AB*, прилежащiй къ этому углу и къ углу прямому *A*. Такъ какъ эти условiя совершенно согласны съ условiями предложенiя e *3-го рода*, разсмотрѣннаго въ началѣ этого n^0, то дальнѣйшiя слѣдствiя выведутся совершенно такъ, какъ сей-часъ было показано. Л. I. Ф. 18.

Предложенiе f *1-го рода* (n^0 1) приведетъ къ теоремѣ о суммѣ трехъ угловъ треугольника на основанiи построенiй, употребленныхъ въ n^0n^0 10, 11 и 20.

12. Въ текстѣ 12-го и слѣдующихъ изданiй Геометрiи Лежандра находимъ другое доказательство предложенiя о суммѣ трехъ угловъ треугольника. По мнѣнiю Автора, это доказательство, со стороны строгости, вполнѣ устраняетъ отъ Началъ Геометрiи нареканiе въ несовершенствѣ теорiи параллельныхъ линiй. Придуманное имъ построенiе чрезвычайно остроумно, элементарно и совершенно строго. Но, позволяемъ себѣ усумниться въ очевидности, и даже въ точности, выводимаго имъ заключенiя. Постараемся оправдать наше утвержденiе надлежащими объясненiями. Но прежде, для удобства соображенiя, приве-

демъ и самое построеніе въ томъ видѣ, какъ оно изложено у Лежандра *):

Л. II. Ф. 19. «Пусть будетъ ABC данный треугольникъ; положимъ, что AB изображаетъ наибóльшую его сторону, BC наимѐньшую, а AC среднюю сторону, которая, случайно, можетъ быть равна одной изъ двухъ другихъ.

«Чрезъ точку A и средину I противолежащей стороны BC проводимъ прямую AI, которую продолжаемъ до C' такъ, чтобы $AC'=AB$; продолжаемъ также AB до B', и беремъ $AB'=2AI$; соединяемъ потомъ C' съ B' прямою $C'B'$.

«Означимъ углы треугольника ABC, въ возрастающемъ порядкѣ ихъ величинъ, чрезъ A, B, C; изобразивъ равнымъ образомъ чрезъ A', B', C' углы треугольника $A'B'C'$ (точка A' совпадаетъ съ A), окажется, что уголъ $C'=B+C$, а уголъ $A=A'+B'$.

«Для доказательства, отложимъ $AK=AI$, и соединивъ C' съ K, получимъ треугольникъ $AC'K$, равный треугольнику ABI. Дѣйствительно, въ этихъ двухъ треугольникахъ общій уголъ при A заключается между двумя взаимно равными сторонами, именно $AC'=AB$ и $AK=AI$. Слѣдовательно, третья сторона $C'K$ равна третей сторонѣ BI; поэтому уголъ $AC'K=ABI$, и уголъ $AKC'=AIB$.

«Далѣе утверждаемъ, что треугольникъ $B'C'K$ равенъ треугольнику ACI; въ самомъ дѣлѣ, сумма двухъ смежныхъ угловъ $AKC'+C'KB'$ равна двумъ прямымъ угламъ, точно такъ какъ и сумма $AIB+AIC$; отнявъ отъ каждой изъ нихъ равные углы AKC', AIB, получимъ уголъ $C'KB'=AIC$. Эти два равные угла въ двухъ треугольникахъ заключаются между двумя равными сторонами каждая каждой, именно, $C'K=BI=CI$ и $KB'=AK=AI$, потому что по строенію $AB'=2AI=2AK$. Слѣдовательно, треугольники $B'C'K$ и ACI равны, а поэтому сторона $B'C'=AC$, уголъ $B'C'K=ACB$ и уголъ $KB'C'=IAC$.

«Изъ доказаннаго слѣдуетъ, 1^0 что уголъ $AC'B'$, означенный чрезъ C', состоитъ изъ двухъ угловъ, равныхъ B и C треугольника ABC, почему и имѣемъ $C'=B+C$; 2^0 что уголъ A треугольника ABC составленъ изъ угла A' или $C'AB'$, принад-

*) Смот. мемуаръ Лежандра, о которомъ упомянуто у насъ въ началѣ n⁰ 8, стр. 386, 387 и 388.

лежащаго треугольнику $AB'C'$ или $A'B'C'$ и угла CAI, равнаго углу B' того же треугольника, въ слѣдствіе чего получимъ $A = A' + B'$.

«И такъ, $A + B + C = A' + B' + C'$, то есть, что сумма угловъ въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ одинакова.

«Сверхъ того, такъ какъ по предположенію $AC < AB$, и слѣдовательно $C'B' < A'C'$, то усматриваемъ, что въ треугольникѣ $AB'C'$, или $A'B'C'$, уголъ A' менѣе угла B'; а какъ сумма этихъ двухъ угловъ равна A, то и заключаемъ, что уголъ $A' < \frac{1}{2}A$, между тѣмъ какъ уголъ B' будетъ въ одно время $> \frac{1}{2}A$ и $< A$.

«Если приложимъ это самое построеніе къ треугольнику $A'B'C'$, то получимъ третій треугольникъ $A''B''C''$; углы его A'', B'', C'', написанные въ возрастающемъ порядкѣ ихъ величинъ, доставятъ, какъ и выше, два равенства $C'' = B' + C'$ и $A' = A'' + B''$, откуда $A'' + B'' + C'' = A' + B' + C'$. Слѣдовательно, сумма угловъ одинакова въ трехъ треугольникахъ; въ то же время будетъ уголъ $A'' < \frac{1}{2}A'$, а поэтому $A'' < \frac{1}{4}A$, и $B'' < A'$ или $B'' < \frac{1}{2}A$. Продолжая неопредѣленно построеніе треугольниковъ $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A'''B'''C'''$ и проч., дойдемъ до треугольника $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$; сумма угловъ его будетъ одинакова съ суммою угловъ первоначальнаго треугольника ABC, а углы $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ удовлетворятъ условіямъ $A^{(n)} < \frac{A}{2^n}$, $B^{(n)} < \frac{A}{2^{n-1}}$.

«Можно принять число n такъ значительнымъ, что предѣлы $\frac{A}{2^n}$ и $\frac{A}{2^{n-1}}$ двухъ угловъ $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ будутъ менѣе всякаго даннаго угла; въ такомъ предположеніи $A^{(n)}$ и $B^{(n)}$ могутъ быть приняты за нули, и сумма угловъ треугольника $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ обратится просто въ $C^{(n)}$.»

Изложенное построеніе послѣдовательныхъ треугольниковъ не подлежитъ никакому возраженію; переходимъ къ заключенію, выводимому Лежандромъ:

«Если будемъ разсматривать треугольникъ abc, имѣющій два весьма малые угла a и b, то, пока эти углы не равны нулю, къ третьему углу acb должно будетъ придать внѣшній уголъ bcd для полученія двухъ прямыхъ; но если предположимъ, что углы a и b уменьшаются неопредѣленно, такъ что стороны ac и bc, обращаясь около своихъ вершинъ a и b, *неопредѣленно при-* Л. II. Ф. 20.

ближаются къ неподвижной сторонѣ ab, то увидимъ, что когда эти углы *уничтожатся совершенно*, тогда двѣ прямыя *acd* и *bc* совмѣстятся съ линіею *ab;* въ то самое время внѣшній уголъ *bcd* уничтожится, и слѣдовательно уголъ *acb*, стороны котораго *ac* и *cb* лягутъ по прямой *ab*, будетъ равенъ двумъ угламъ прямымъ (стр. 388 и 389).»

Въ этой выпискѣ мы подчеркнули тѣ мѣста, которыя показались намъ спорными.

Чтобы совершенно войти въ смыслъ вопроса, необходимо обратить вниманіе на то, что при переходѣ отъ одного треугольника къ слѣдующему преобразованному, основаніе *ab* новаго треугольника *abc*, а равно и остальныя двѣ стороны его *ac* и *bc*, увеличиваются. И такъ, съ постепеннымъ уменьшеніемъ угловъ *a* и *b*, основаніе *ab* треугольника *abc* будетъ увеличиваться. Что же касается до закона увеличенія этого основанія *ab* сравнительно съ первоначальнымъ *AB* (фиг. 19), то употребленное Лежандромъ построеніе нисколько его не обнаруживаетъ.

Л. II. Ф. 21. Условясь въ этомъ, замѣтимъ во-первыхъ, что опустивъ изъ вершины *c* перпендикуляръ *ck* на *ab*, мы не можемъ вывести никакого заключенія о длинѣ этого перпендикуляра при неопредѣленно уменьшающихся углахъ *a* и *b*. Дѣйствительно, положимъ, что посредствомъ построенія Лежандра, мы перешли отъ треугольника *abc* къ слѣдующему преобразованному треугольнику $ab'c'$, и опустили потомъ перпендикуляръ $c'k'$ на ab'. Ничто не доказываетъ, чтобы перпендикуляръ $c'k'$ былъ меньше *ck*, или, иначе, чтобы вершина *c* была ближе отъ основанія ab', чѣмъ *c* отъ *ab*. Еслибъ даже и допустили, что $c'k'$ менѣе *ck*, то и въ такомъ случаѣ имѣли бы право возражать, что длины перпендикуляровъ *ck*, $c'k'$, $c''k''$, $c'''k'''$...., относящихся къ последовательнымъ треугольникамъ, могутъ приближаться къ нѣкоторому конечному предѣлу, пока углы *a* и *b* не уничтожились совершенно. Намъ кажется, что на это возраженіе невозможно отвѣчать. И такъ, первое подчеркнутое мѣсто: *неопредѣленно приближаются къ неподвижной сторонѣ ab*, не представляетъ, смѣю думать, надлежащей точности. Если бы основаніе *ab* было *постоянное*, или по крайней мѣрѣ *конечное*, то безъ сомнѣнія, при неопредѣленномъ уменьшеніи угловъ *a* и *b*, самыя стороны

ac и *bc* стремились бы неопредѣленно къ совмѣщенію съ третею стороною *ab*. Но мы замѣтили выше, что при уменьшеніи угловъ *a* и *b*, основаніе *ab* увеличивается, между тѣмъ какъ законъ этого увеличенія не можетъ быть выведенъ изъ построенія; слѣдовательно, заключеніе о приближеніи сторонъ *ac* и *bc* къ *ab*, или, что все равно, вершины *c* къ *ab* не дозволительно.

Предложимъ еще нѣкоторыя сомнѣнія на счетъ строгости заключенія Лежандра. По его сужденію, такъ какъ углы *a* и *b* могутъ быть уменьшены по произволенію, то можно принять, что они *уничтожаются совершенно*, и поэтому совмѣстить стороны *ac* и *bc* съ *ab*, послѣ чего уголъ *acb* обратится въ два прямые. Но такимъ образомъ мы совсѣмъ уничтожимъ треугольникъ *abc*, и приведемъ его къ прямой линіи. По сущности вопроса требуется доказать, что при неопредѣленномъ уменьшеніи угловъ *a* и *b*, сумма $a + b + c$ равна двумъ прямымъ; слѣдовательно, для строгости заключенія должно показать сперва, что уголъ *acb* приближается къ предѣлу, равному двумъ прямымъ угламъ, или, что приводится къ тому же, что внѣшній уголъ *bcd* стремится къ нулю. Если бы доказали эту послѣднюю истину, то изъ нея заключили бы дѣйствительно и о справедливости предложенія относительно суммы угловъ треугольника. Но мы покажемъ сей-часъ, что эта истина равнозначаща съ свойствомъ наклонной, пересѣкающейся съ перпендикуляромъ, и что слѣдовательно, принимая свойство внѣшняго угла *bcd* безъ доказательства, мы нисколько не подвигаемъ впередъ теоріи параллельныхъ линій. Ф. 20.

Дѣйствительно, пусть будетъ *abc* преобразованный треугольникъ, въ которомъ углы *a* и *b* какъ угодно малы, а *ck* перпендикуляръ, опущенный изъ вершины *c* на основаніе *ab*. Мы уже видѣли выше, что относительно длины этого перпендикуляра *ck* нельзя сказать ничего опредѣлительнаго. Слѣдовательно мы не имѣемъ права ограничить его величины. Проведемъ изъ *c* линію *ce*, перпендикулярно къ *ck*; прямая *ce* пройдетъ непремѣнно внутри угла *bcd* по той причинѣ, что оба угла *bck* и *ack* острые. Далѣе, такъ какъ Лежандръ предполагаетъ, что внѣшній уголъ *bcd* стремится къ нулю вмѣстѣ съ *a* и *b*, то поэтому и уголъ *bce* удовлетворитъ тому же условію. Допустивъ это, мы въ то же Л. II. Ф. 22.

время допускаемъ, что наклонная cb къ ck пересѣкаетъ перпендикуляръ kb къ той же прямой ck, и притомъ какъ бы малъ ни былъ уголъ bce, или, иначе, какъ бы уголъ kcb не былъ близокъ къ прямому. Такимъ образомъ, принявъ въ соображеніе, что длина линіи ck не ограничена никакимъ особеннымъ условіемъ, мы прямо приведены къ *предложенію о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ.*

Л. II. Ф. 23. Пояснимъ еще наше возраженіе. Лежандръ говоритъ, что когда углы a и b *уничтожатся совершенно*, тогда двѣ прямыя ac и bc совмѣстятся съ линіею ab. Но вникнемъ въ то обстоятельство, что такъ какъ должно допустить и предположеніе, что основаніе ab можетъ увеличиться неопредѣленно, а слѣдовательно и части ka и kb этого самаго основанія, то имѣемъ-ли право заключить отсюда о совмѣстимости сторонъ ac и bc съ ab, при уничтожившихся углахъ a и b? Не можетъ-ли случиться, что стороны ac, bc, перейдя послѣдовательно чрезъ всѣ возможныя положенія $a'c$, $a''c$,... $b'c$, $b''c$..., при которыхъ углы a и b убываютъ неопредѣленно, примутъ предѣльныя положенія fc и hc, для которыхъ имѣемъ также $a = o$ и $b = o$. Такъ какъ изъ построенія не видно, будетъ-ли или нѣтъ длина перпендикуляра ck стремиться къ нулю въ одно время съ углами a и b, то противъ сдѣланнаго сей-часъ возраженія кажется трудно отвѣчать. Для избѣжанія сбивчивости въ чертежѣ, мы удержали общую вершину c для всѣхъ преобразованныхъ треугольниковъ; очевидно, что наше объясненіе нисколько не измѣнится, если примемъ эту вершину подвижною, чего требуетъ строгость построенія.

13. Доказательство Лежандра, основанное на свойствахъ двуугольниковъ, по нашему мнѣнію, подаетъ поводъ къ возраженіямъ одного рода съ тѣми, которыя мы предложили при разборѣ доказательствъ Бертрана. Въ способѣ двуугольниковъ, изложенномъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ Лежандра, Авторъ доказываетъ отличительное свойство равноотстоянія параллельныхъ линій. Такъ какъ онъ считаетъ это доказательство простѣйшимъ изъ всѣхъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ столько же удовлетворительнымъ со стороны строгости, какъ и то, которое изложено въ предъидущемъ n° 12, то считаемъ не излишнимъ привести его вполнѣ въ переводѣ.

«Прежде всего замѣтимъ, что всякій косоугольный двуугольникъ $CABD$ можетъ быть превращенъ въ равномѣрный съ нимъ прямоугольный двуугольникъ. Дѣйствительно, если изъ средины F основанія AB опустимъ перпендикуляры FG на линію AC и FH на линію BD, параллельную къ AC, и продолженную въ сторону H, то легко доказать, что прямоугольные треугольники AFG, BFH будутъ равны, почему GFH составитъ одну прямую линію, въ одно время перпендикулярную къ обѣимъ параллельнымъ прямымъ AC, BD, и раздѣленную пополамъ въ точкѣ F. Л. II. Ф. 24.

«Слѣдовательно, посредствомъ такого построенія, получится прямоугольный двуугольникъ $CGHD$, равномѣрный съ косоугольнымъ двуугольникомъ $CABD$; и въ самомъ дѣлѣ, мы видимъ, что достаточно къ косоугольному двуугольнику прибавить треугольникъ BFH, и отнять отъ него равный треугольникъ AGF, чтобъ обратить косоугольный двуугольникъ въ прямоугольный. Сверхъ того замѣчаемъ, что проведя FE перпендикулярно къ GH, прямоугольный двуугольникъ $CGHD$ раздѣлится на двѣ равныя части этою прямою FE, потому что двуугольники $CGFE$, $EFHD$, имѣя равныя основанія GF, FH, могутъ быть совмѣщены, и слѣдовательно равны между собою. Послѣ этихъ объясненій, мы начнемъ съ доказательства слѣдующей теоремы, изъ которой уже легко можетъ быть выведена вся теорія параллельныхъ линій.

«**Теорема.** Пусть будутъ AC и BD двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третей AB, и слѣдовательно параллельныя между собой; *если, изъ какой ни есть точки M прямой AC, возставимъ перпендикуляръ MN къ AC, и ограничимъ его при встрѣчѣ съ другою параллельною BD*, то окажется, 1° что прямая MN будетъ равна AB; 2° что эта самая прямая MN, перпендикулярная къ AC, будетъ вмѣстѣ перпендикулярна и къ параллельной съ нею BD.» Л. II. Ф. 25.

«**Доказательство.** Изъ точки N проводимъ чрезъ средину I линіи AB прямую NI до встрѣчи съ AC, продолженной въ сторону P; два треугольника BIN, AIP будутъ равны, потому что имѣютъ по равной сторонѣ $BI = AI$ съ двумя равными прилежащими углами, именно: углы BIN и AIP равны, какъ противоположные вершинами, и углы при B и A, какъ прямые. Слѣдовательно сторона $IN = IP$, а уголъ $BNI = API$. Отсюда за-

ключаемъ, что сумма двухъ угловъ *CPN*, *PND* равна суммѣ двухъ угловъ *INB*, *IND*, и поэтому равна двумъ прямымъ угламъ. Такимъ образомъ мы получаемъ косоугольный двуугольникъ *CPND*, равномѣрный съ прямоугольнымъ двуугольникомъ *CABD*, который имѣетъ основаніемъ своимъ линію *AB*; покажемъ теперь, что можно найти еще другое значеніе для косоугольнаго двуугольника *CPND*.

«Продолжимъ *PN* до *Q*, такъ чтобы $NQ = PN$, и чрезъ точку *Q* проведемъ прямую *GQY*, составляющую съ *NQ* уголъ $GQN = QND$. Въ такомъ случаѣ сумма двухъ угловъ *DNQ*, *NQY* будетъ равна двумъ прямымъ угламъ; такимъ образомъ получится второй двуугольникъ *DNQY*, равный двуугольнику *CPND*; и въ самомъ дѣлѣ, эти два двуугольника могутъ быть совмѣщены, точно такъ какъ совмѣщались бы два треугольника, имѣющіе по равной сторонѣ $PN = NQ$ съ двумя равными прилежащими углами.

«Съ другой стороны, эти самые два двуугольника, взятые вмѣстѣ, составляютъ одинъ двуугольникъ *CPQY*, имѣющій основаніемъ линію *PQ*; такъ какъ *PQ* дѣлится пополамъ въ точкѣ *N*, то треугольники *GNQ*, *MNP* будутъ равны; дѣйствительно, они имѣютъ по равной сторонѣ съ двумя равными прилежащими углами, именно: $NQ = PN$, уголъ $GNQ = PNM$, уголъ $GQN = NPM$. Слѣдовательно сторона $GN = MN$, а уголъ *NGQ* будетъ прямой, какъ и уголъ *NMP*. И такъ, косоугольный двуугольникъ *CPQY*, вдвое бóльшій двуугольника *CPND*, будетъ равномѣренъ съ прямымъ двуугольникомъ *CMGY*, имѣющимъ основаніемъ своимъ линію *MG*; поэтому *CPQY* будетъ также вдвое больше прямоугольнаго двуугольника, имѣющаго основаніемъ линію *MN*, равную половинѣ линіи *MG*. Изъ этого слѣдуетъ, что косоугольный двуугольникъ *CPND*, равномѣрный съ прямымъ двуугольникомъ, построеннымъ на основаніи *AB*, равномѣренъ также съ прямымъ двуугольникомъ, построеннымъ на основаніи *MN*. Но какъ два равные прямые двуугольника должны имѣть равныя основанія, то изъ этого слѣдуетъ, 1^0 что перпендикуляръ *MN* равенъ линіи *AB*.

«*Мы возставили перпендикуляръ MN къ AC до встрѣчи съ BD*, и доказали, что $MN = AB$; еслибъ, подобнымъ образомъ, изъ точки *N* возставили перпендикуляръ къ *BD* до встрѣчи съ *AC*,

то этотъ перпендикуляръ, который изобразимъ чрезъ NM', долженъ бы также равняться AB; но очевидно, что еслибъ эта вторая прямая NM' не совмѣщалась съ перпендикуляромъ NM, то она была бы наклонною линіей, бóльшею чѣмъ NM, и слѣдовательно бóльшею чѣмъ AB. И такъ, чтобъ NM' равнялась AB, эта линія NM' необходимо должна совмѣщаться съ NM; слѣдовательно 2° прямая MN будетъ въ одно время перпендикулярна къ обѣимъ параллельнымъ линіямъ AC, BD *).»

Прежде всего замѣтимъ, что въ доказательство Лежандра вкралась неточность выраженія, которая повторилась въ нѣсколькихъ мѣстахъ (стр. 401, 403, 406). Лежандръ допускаетъ, что имѣя двѣ параллельныя линіи AC и BD, то есть, двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третей прямой AB, которую онъ называетъ *основаніемъ* двуугольника $CABD$, перпендикуляръ MN, возставленный изъ M къ AC, пересѣчетъ линію BD. Какъ бы это предложеніе не казалось очевиднымъ съ перваго взгляда, но оно допущено быть не можетъ. Отсылаемъ по этому предмету къ указанію Фурье, помѣщенному въ *Analyse des travaux de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1825, Partie mathématique*, стр. XIV, а также, для полнаго разъясненія вопроса, къ n° 11 нашего Опыта. Впрочемъ, возраженіе наше будетъ относиться не къ этому спорному предложенію; легко избѣгнуть его, не нарушая геометрической строгости. Дѣйствительно, обратясь къ мемуару Лежандра, увидимъ, что вездѣ, гдѣ сказано въ немъ: *проведя прямую MN перпендикулярно къ линіи AC, и ограничивъ ее при пересѣченіи съ параллельною ей BD*, можно въ замѣнъ употребить слова: *чрезъ точку N, взятую на BD, опускаемъ перпендикуляръ NM на прямую AC*.

Л. II. Ф. 26.

Ф. 26.

Возраженіе наше будетъ относиться къ предложенію о *равенствѣ двуугольниковъ* (стр. 403, 405), которое Лежандръ основываетъ на началѣ *равенства по совмѣщенію* (стр. 401), присовокупляя къ нему требованіе о возможности откидывать величину конечную предъ величиною безконечно большою. Нѣтъ сомнѣнія, что начало равенства по совмѣщенію, когда рѣчь идетъ объ фигурахъ ограниченныхъ, вполнѣ удовлетворительно и по своей очевидности, и по строгости; но для пространствъ

*) Смот. въ упомянутомъ выше мемуарѣ Лежандра стр. 400 и слѣдующія.

*

безконечныхъ, и мы имѣли уже случай говорить о томъ (n⁰n⁰ 6 и 7), это начало не удовлетворяетъ условіямъ ясности, и даже строгости, требуемыхъ въ особенности въ элементарныхъ доказательствахъ. Постараемся показать это на самомъ случаѣ двухъ прямоугольныхъ двуугольниковъ. И замѣтимъ во первыхъ, что нѣтъ никакого условія, ограничивающаго длины сторонъ двуугольника, каково бы впрочемъ не было его основа-
Л. II. Ф. 27. ніе. Такъ стороны *AL* и *BM*, *AL* и *CN*, *AL* и *DP* и проч. должно принимать равной безконечной длины, хотя онѣ и принадлежатъ неравнымъ двуугольникамъ, ибо первый изъ нихъ имѣетъ основаніемъ своимъ линію *AB*, второй *AC*, третій *AD* и проч. Само собой разумѣется, мы предполагаемъ при этомъ, какъ видно на чертежѣ, что всѣ основанія совпадаютъ съ прямою *AD*. Сказанное нами совершенно согласуется съ *началомъ достаточнаго основанія;* дѣйствительно, нѣтъ никакой причины, по которой бы одна изъ безконечныхъ линій *AL*, *BM*, *CN*, *DP* и проч. была болѣе другой. Слѣдовательно, должно допустить безусловное ихъ равенство, то есть, равенство сторонъ въ двуугольникахъ *LABM*, *LACN*, *LADP* и проч., каковы бы не были соотвѣтственныя имъ основанія.

Л. II. Ф. 28. Условясь въ этомъ, пусть будетъ *CABD* данный прямоугольный двуугольникъ; изъ точки *N*, взятой на линіи *BD*, опустимъ на *AC* перпендикуляръ *NM*, и отложимъ по его направленію, отъ точки *M*, длину *MK*, равную основанію *AB*. Мы принимаемъ *NM* бо́льшимъ *AB*, ибо допустивъ, что *NM* меньше *AB*, будемъ приведены къ тому невозможному слѣдствію, что сумма угловъ треугольника превосходитъ два прямые угла *). Равен-

Л. II. Ф. 29. *) Дѣйствительно, положимъ, что отъ крайнихъ точекъ *A* и *B* прямоугольнаго двуугольника *CABD* отложили по направленіямъ *AC* и *BD* произвольныя, но равныя между собою линіи *AP* и *BQ*, и соединили потомъ точки *P* и *Q* прямою *PQ*. Раздѣливъ основаніе *AB* пополамъ въ точкѣ *E*, и возставивъ изъ *E* перпендикуляръ *EG* къ *AB*, этотъ перпендикуляръ раздѣлитъ линію *PQ* въ точкѣ *F* на двѣ равныя части *FP* и *FQ*. Съ другой стороны очевидно, что *FP* и *FQ* будутъ перпендикулярны къ *EG*; слѣдовательно, допуская, что перпендикуляръ *QF* въ двуугольникѣ *DBEG* меньше основанія его *BE*, окажется, что и линія *PQ* менѣе *AB*. Посмотримъ теперь, къ какому слѣдствію приведетъ насъ такое предположеніе. Соединивъ *A* съ *Q*, получимъ два треугольника *APQ* и *BQA*, имѣющіе двѣ равныя стороны, именно: общую сторону *AQ* и $AP = BQ$; такъ какъ третья сторона *AB* въ треугольникѣ *BQA*, по предположенію, больше стороны *PQ* треугольника *APQ*, то получимъ уголъ $b > a$; съ другой же стороны имѣемъ

$$d = \text{углу прямому}, \quad c = \text{углу прямому} - a;$$

ство же $NM = AB$ непосредственно влечетъ за собою отличительное свойство равноотстоянія параллельныхъ линій. Вся трудность ихъ теоріи заключается именно въ доказательствѣ, что перпендикуляръ NM не можетъ быть болѣе AB. Проведемъ теперь чрезъ точку K прямую KL, перпендикулярную къ MK; такимъ образомъ получимъ прямоугольный двуугольникъ $CMKL$, имѣющій основаніе равное съ основаніемъ первоначальнаго двуугольника $CABD$. Такое построеніе приводитъ, по видимому, къ сомнѣнію на счетъ предполагаемаго равенства прямоугольныхъ двуугольниковъ, при равныхъ основаніяхъ; дѣйствительно, не слѣдуетъ-ли заключить изъ чертежа, что избытокъ площади двуугольника $CABD$ предъ площадью двуугольника $CMKL$ состоитъ изъ двухъ частей: 1^0 изъ конечной площади $ABNM$ и 2^0 изъ безконечнаго пространства $LKND$? Мы говоримъ, что послѣднее пространство предполагается безконечнымъ, и это потому что уголъ KND должно принимать *тупымъ*, иначе сумма четырехъ угловъ фигуры $ABNM$, которая разлагается на два треугольника, превышала бы четыре прямые угла, что̀ невозможно.

Можетъ быть скажутъ, что самое слѣдствіе наше, — неравенство площадей двухъ прямыхъ двуугольниковъ съ равными основаніями, — повидимому противорѣчащее здравымъ понятіямъ, доказываетъ, что употребленное нами построеніе невѣрно, и что непремѣнно должно допустить $NM = KM = AB$ (откуда уже непосредственно вытекаетъ вся теорія параллельныхъ линій); на это мы будемъ отвѣчать, что замѣченное противорѣчіе только кажущееся. Дѣйствительно, пока не ограничиваемъ длины сторонъ двуугольника, вотъ къ чему приводитъ наше построеніе: положимъ, что по направленію AC и BD отложили произвольныя равныя части AA' и BB'; отложимъ ту же часть AA' отъ M до M' и отъ K до K', и соединимъ потомъ B' съ A' и K' съ M' прямыми $A'B'$, $K'M'$. Очевидно, что часть $ABB'A'$ прямаго неопредѣленнаго двуугольника $CABD$ должна быть равна части $MKK'M'$ двуугольника $CMKL$. Употребленное нами строеніе не обнаруживаетъ ничего, отрицающаго это равенство:

слѣдовательно, сложивъ, получимъ

$$b + c + d > \text{двухъ прямыхъ угловъ},$$

чего не можетъ быть, потому что b, c, d означаютъ углы треугольника ABQ.

изъ него слѣдуетъ только, что пространство $ABNB'EKMA$ равно части $A'EK'M'$, въ чемъ не видимъ никакого признака невозможности. Съ другой же стороны, такъ какъ длина AA' можетъ быть увеличена по произволу, то кажущееся противорѣчіе объясняется само собою.

И такъ, мы не можемъ заключить, чтобы два прямые двуугольника, равномѣрные по площади, имѣли непремѣнно равныя основанія, а усматриваемъ только, что это предложеніе не представляетъ ничего противорѣчиваго. Сверхъ того, употребленное построеніе показываетъ, если не ошибаемся, что *начало совмѣщенія*, для площадей безконечныхъ, не имѣетъ той степени точности и опредѣлительности, какой въ правѣ требовать отъ элементарныхъ доказательствъ. Постараемся подтвердить сказанное еще другимъ построеніемъ.

Л. II. Ф. 30. Пусть будетъ неопредѣленная фигура $A'ABB'$, въ которой углы при A и B предполагаются *тупыми* и равными между собой; возьмемъ линію произвольной длины, и отложимъ её отъ A къ C и отъ B къ D; соединимъ C съ D прямою CD, и опредѣлимъ на ней точки a и b по условіямъ $ab = AB$ и $aC = bD$. Изъ точекъ a и b проведемъ неопредѣленныя прямыя aa' и bb' такимъ образомъ, чтобы углы $a'ab$ и abb' были равны угламъ A и B первоначальной фигуры $A'ABB'$. Неограниченная фигура $a'abb'$, хотя тожественна съ первоначальною $A'ABB'$, но вмѣщается въ ней, и имѣетъ площадь, разствующую отъ $A'ABB'$ безконечнымъ пространствомъ $B'BAA'a'abb'$. Конечно могутъ сказать, что эта избыточная площадь $B'BAA'a'abb'$ есть величина безконечная только *перваго порядка*, которую слѣдуетъ откинуть предъ пространствомъ $A'ABB'$, изображающимъ безконечно большую величину *втораго порядка*. Это справедливо, но чтобы удостовѣриться *a priori* въ несомнѣнности такого утвержденія, нужно доказать, что $A'ABB'$ есть пространство *угловое*; это самое заставитъ прибѣгнуть къ 11-й Эвклидовой аксіомѣ, въ слѣдствіе которой дѣйствительно прямыя $A'A$ и $B'B$, достаточно продолженныя въ лѣвую сторону, пересѣкаются. — Прибавимъ къ этому, что подобныя объясненія, основанныя на разсматриваніи пространствъ не только конечныхъ, но и безконечныхъ, не должны быть допускаемы въ изложеніи началъ Геометріи уже

потому что, безъ пособія теоріи параллельныхъ линій, понятіе о площадяхъ не можетъ имѣть никакой опредѣлительности. Руководствуясь же подобными соображеніями, легко впасть въ кругъ, и принять доказаннымъ тò что̀ спрашивается.

Окончимъ наши замѣчанія на это доказательство сказавъ нѣсколько словъ о тѣхъ возраженіяхъ, которыя самъ Лежандръ предложилъ себѣ относительно свойствъ двуугольниковъ (стр. 405). Мы разумѣемъ объясненіе, относящееся къ тому что безконечныя площади двухъ двуугольниковъ, изъ которыхъ одинъ заключенъ въ другомъ, могутъ разнствовать между собою только площадью конечною, почему и должны быть принимаемы за равныя. Въ этомъ отношеніи мы замѣтимъ, что приступая къ теоріи параллельныхъ линій, или, что̀ собственно одно и тò же, къ свойствамъ двуугольниковъ, нельзя, не нарушивъ логической строгости, допустить предложеніе о *равенствѣ основаній прямыхъ двуугольниковъ*, *равномѣрныхъ по площади* (стр. 403), основывая это заключеніе на соображеніяхъ, которыя сами слѣдуютъ изъ этого допускаемаго равенства, какъ тò легко повѣрить обратясь къ мемуару Лежандра. И дѣйствительно, въ предлагаемомъ Лежандромъ объясненіи (стр. 406), онъ говоритъ о рядѣ равныхъ прямоугольниковъ; но очевидно, что отрицая предложеніе относящееся къ двуугольникамъ, мы будемъ въ правѣ отвергнуть также и существованіе этихъ прямоугольниковъ.

11. Есть еще примѣчательное доказательство предложенія о суммѣ трехъ угловъ треугольника, основанное на *законѣ однородности*; оно отчасти аналитическое, а отчасти синтетическое, и предложено Лежандромъ еще въ 1794 году въ первомъ и въ послѣдующихъ изданіяхъ его Геометріи. Это доказательство приводитъ окончательно къ тому, что отрицая равенство суммы угловъ треугольника двумъ прямымъ угламъ, мы должны будемъ допустить слѣдствіе невозможное, именно существованіе *опредѣленной единичной длины*, о которой вопросъ, по сущности своей, не представляетъ никакихъ данныхъ. Это начало, по нашему мнѣнію, самое удовлетворительное, и, кажется, единственное, на которомъ можно основать со всею строгостію теорію параллельныхъ линій. Поэтому, въ дальнѣйшемъ изложеніи, наши замѣчанія будутъ относиться не къ сущности упоминаемаго на-

чала, а только къ способу примѣненія его Лежандромъ къ доказательству теоремы о суммѣ трехъ угловъ треугольника. Въ n⁰ 21 мы предложимъ собственный опытъ доказательства теоріи параллельныхъ линій, основанный на *законѣ однородности*, о которомъ теперь идетъ рѣчь.

Л. II. Ф. 31. Лежандръ разсматриваетъ треугольникъ ABC, въ которомъ одна сторона $AB = p$, и два прилежащіе угла A и B извѣстны; эти данныя достаточны для полнаго опредѣленія треугольника. И такъ, приступая къ рѣшенію вопроса, должно предположить, что третій уголъ C зависитъ отъ A, B и p, въ слѣдствіе чего получимъ $C = \varphi(A, B, p)$. Далѣе, чтобъ показать что сторона p не входитъ подъ знакъ функціи φ, или, что̀ всё равно, что имѣемъ просто $C = \varphi(A, B)$, Лежандръ разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ:

«Условимся принимать прямой уголъ за единицу; тогда углы A, B, C можно будетъ изобразить числами, заключающимися между 0 и 2. Пусть будетъ $C = \varphi(A, B, p)$; утверждается, что линія p не должна входить въ функцію φ. Дѣйствительно мы видѣли, что C опредѣляется совершенно посредствомъ однѣхъ данныхъ A, B, p; и если бы имѣли какое ни есть уравненіе между A, B, C, p, то можно бы было вывести изъ него величину p, и выразить её чрезъ количества A, B и C: отсюда слѣдовало бы заключить, что сторона p равна числу, что невозможно. И такъ, p не можетъ входить въ функцію φ, почему и имѣемъ просто $C = \varphi(A, B)$.

«Эта формула уже доказываетъ, что если два угла одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другаго, то третьи углы этихъ двухъ треугольниковъ должны быть равны между собою (стр. 373 упомянутаго выше мемуара).»

Допустивъ такое сужденіе, и слѣдовательно справедливость уравненія $C = \varphi(A, B)$, остальное въ доказательствѣ не представляетъ болѣе никакого затрудненія.

Л. II. Ф. 32. «Дѣйствительно, пусть будетъ сперва ABC прямоугольный треугольникъ; изъ вершины прямаго угла A опускаемъ перпендикуляръ AD на гипотенузу его BC; углы B и D треугольника ABD соотвѣтственно равны угламъ B и A треугольника CBA; слѣдовательно, въ силу доказаннаго сей-часъ свойства, третій

уголъ BAD будетъ равенъ углу C. По той же самой причинѣ уголъ $DAC=B$; и такъ $BAD+DAC$ или $BAC=B+C$; но какъ уголъ BAC прямой, то и заключаемъ, что *сумма острыхъ угловъ въ прямоугольномъ треугольникѣ равна прямому углу.*

«Пусть будетъ наконецъ BAC какой ни есть треугольникъ, а BC та сторона его, которая не менѣе каждой изъ двухъ остальныхъ. Если, изъ вершины A противоположнаго ей угла, опустимъ перпендикуляръ AD на BC, то основаніе его D упадетъ между точками B и C, и треугольникъ ABC раздѣлится на два прямоугольные треугольника BAD, DAC; но мы доказали, что сумма двухъ острыхъ угловъ BAD и ABD въ прямоугольномъ треугольникѣ BAD равна прямому; равнымъ образомъ, сумма угловъ DAC и ACD прямоугольнаго треугольника DAC равна углу прямому. Слѣдовательно, сумма четырехъ острыхъ угловъ, или, что̀ всё равно, сумма трехъ угловъ $BAC+ABC+ACB$ составитъ два прямые угла. И такъ, во всякомъ треугольникѣ сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ (стр. 373 и 374).» Л. II. Ф. 33.

Далѣе Лежандръ предлагаетъ нѣкоторыя развитія на счётъ несообразности результата, къ которому привело бы насъ допущеніе какой либо зависимости стороны p отъ угловъ A, B, C треугольника ABC. Вотъ что̀ говоритъ онъ по этому предмету:

«Три угла A, B, C могутъ быть даны только посредствомъ отвлеченныхъ чиселъ, выражающихъ ихъ отношеніе къ прямому углу, принимая послѣдній за единицу. Напримѣръ, можно предположить $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=\frac{4}{5}$, и тогда сумма угловъ будетъ $\frac{59}{30}$, то есть, она будетъ разнствовать отъ двухъ прямыхъ, по недостатку, на $\frac{1}{30}$ часть прямаго угла; и такъ, безусловная длина стороны AB треугольника должна быть опредѣлена этими тремя числами. Невозможность такого слѣдствія очевидна; дѣйствительно, какова бы ни была зависимость, служащая для опредѣленія стороны AB посредствомъ трехъ чиселъ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$, нельзя будетъ изъ нея вывести инаго результата, какъ только того, что AB есть число цѣлое, или дробное, раціональное, или ирраціональное; если напримѣръ окажется, что это число равно 12, то ничего нельзя будетъ рѣшить на счётъ безусловной величины AB, ибо надлежало бы знать, какія единичныя длины изображаетъ число 12, будутъ-ли это миллиметры, метры, футы, тоазы, мили Ф. 33.

и проч. Въ существѣ вопроса не находимъ ничего, что̀ могло бы указать на величину единичной длины; и это самое *отсутствіе единичной длины обнаруживаетъ невозможность результата, о которомъ идетъ рѣчь* (стр. 381).»

Послѣднія подчеркнутыя слова заключаютъ утвержденіе, которое, можетъ быть, не въ полной мѣрѣ оправдано предлагаемыми авторомъ объясненіями. Войдемъ въ этомъ отношеніи въ нѣкоторыя подробности.

Вопросъ собственно состоитъ въ томъ, чтобы показать строгимъ образомъ, что *прямолинейный уголъ не можетъ привести къ опредѣленной длинѣ.* Это утвержденіе непосредственно влечетъ за собою справедливость предложенія о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ. Дѣйствительно, отрицая эту истину, мы тѣмъ
Л. I. Ф. 8. самымъ допускаемъ существованіе предѣльной точки B, взятой на сторонѣ AE угла BAC', начиная отъ которой наклонная AC' не будетъ уже встрѣчать перпендикуляра BD къ прямой AE. Въ такомъ случаѣ уголъ BAC', противно утвержденію, приведетъ къ *опредѣленной длинѣ* AB. Но еслибъ замѣнили одну изъ сторонъ AC' прямолинейнаго угла BAC' безконечною вѣтвью кривой AMC, имѣющею ассимптотою своею прямую BD, перпендикулярную къ AB, то существованіе предѣла, о которомъ говоримъ, сдѣлалось бы совершенно очевиднымъ. Ясно, что какъ бы далеко не взяли точку M, основаніе N перпендикуляра MN никогда не достигнетъ точки B, приближаясь къ ней неопредѣленно. И такъ, кривая линія AMC вполнѣ опредѣлитъ длину AB. Теперь естественно представляется вопросъ, почему подобное не можетъ случиться и при разсматриваніи прямолинейнаго угла? Чтобъ отвѣчать въ отрицательномъ смыслѣ, пришлось бы прибѣгнуть къ понятіямъ о *параметрахъ*, и войти въ подробности на счётъ существеннаго различія между прямою и кривыми линіями. Если бы Лежандръ выполнилъ это элементарнымъ образомъ, то доказательство его было бы совершенно удовлетворительно. Въ n° 21, какъ уже сказано выше, мы предложимъ собственныя соображенія по этому предмету.

Повторяемъ, доказательство, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, основано на невозможности вывесть опредѣленную длину изъ прямолинейнаго угла. Покамѣстъ эта невозможность не дока-

зана строгимъ образомъ, нельзя получить никакого слѣдствія. Въ самомъ дѣлѣ, обратимся къ уравненію $C = \varphi(A, B, p)$, которое Лежандръ считаетъ несообразнымъ; можно возразить, что уголъ A напримѣръ, приводитъ къ нѣкоторой опредѣленной длинѣ q, а уголъ B къ длинѣ r, и что эти величины q и r войдутъ также подъ знакъ функціи φ. Тогда, принявъ $C = \varphi(A, B, \frac{p}{q}, \frac{p}{r})$, получимъ уравненіе не представляющее никакого противорѣчія, ибо оно заключаетъ только отношенія $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{r}$ одной линіи къ другой, то есть числа отвлеченныя. Что же касается до *единичной длины*, посредствомъ которой выражаются p, q, r и всякая другая линія, то можно условиться напримѣръ въ томъ, что она изображаетъ предѣльную длину AB при разсматриваніи опредѣленнаго остраго угла BAC, положимъ равнаго *половинѣ прямаго угла*. И такъ, если означимъ чрезъ q предѣльную длину, относящуюся къ данному углу A, то можно принять $q = f(A)$. Изобразивъ чрезъ d прямой уголъ, окажется, что функція f удовлетворяетъ во первыхъ условію $f(\frac{1}{2} d) = 1$, и сверхъ того, какъ легко видѣть, слѣдующимъ двумъ: $f(d) = o$ и $f(o) = \infty$. Л. I. Ф. 8.

15. Предложимъ еще доказательство, основанное отчасти на понятіяхъ о силахъ.

Пусть будетъ прямая AB, неопредѣленно продолженная въ обѣ стороны. Раздѣлимъ её мысленно на безконечное число равныхъ частей aa', $a'a''$, $a''a'''$, $a'''a^{IV}$ и проч. Если примемъ эту прямую за матеріальную, и къ каждой точкѣ дѣленія a, a', a'', a'''.... приложимъ, перпендикулярно къ направленію AB, равныя силы, положимъ P, то эта прямая получитъ нѣкоторое движеніе въ сторону дѣйствія силъ. Вообразимъ теперь, что по истеченіи нѣкотораго времени остановили движеніе; естественно допустить, что въ продолженіи этого промежутка не произошло перелома въ матеріальной прямой AB, ни измѣненія ея вида. Пусть новое положеніе матеріальной прямой будетъ $A'B'$. По тожественному расположенію и по равенству всѣхъ дѣйствующихъ силъ очевидно, что всѣ перпендикулярныя разстоянія ba, $b'a'$, $b''a''$, $b'''a'''$.... прямой $A'B'$ отъ линіи AB будутъ равны между собою. Сверхъ того, такъ какъ углы при b, b', b'', b''' ...., составляемые перпендикулярами ba, $b'a'$, $b''a''$, $b'''a'''$ .... съ направленіемъ $A'B'$, должны Л. II. Ф. 34.

быть одинаковы по причинѣ тожества обстоятельствъ съ обѣихъ сторонъ каждой точки b, b', b'', b''' ...., то общая величина ихъ изобразится прямымъ угломъ. Такимъ образомъ получится рядъ равныхъ *прямоугольниковъ* $abb'a'$, $a'b'b''a''$, $a''b''b'''a'''$ и проч., послѣ чего уже легко будетъ доказать какое угодно основное свойство параллельныхъ линій.

Если допустимъ весьма естественное предположеніе, что матеріальная прямая, при воображаемомъ движеніи, не укорачивается и не удлинняется между каждыми двумя смежными точками приложенія силъ, и поэтому не подвергается ни перелому, ни измѣненію вида, то приведенное сей-часъ доказательство совершенно строго.

Замѣтимъ, что вмѣсто матеріальной неизмѣняемой прямой линіи, подверженной дѣйствію равныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ равноотстоящимъ одна отъ другой, можно разсматривать просто *тяжелую* прямую; допущеніе возможности горизонтальнаго ея движенія, безъ перелома, послужитъ строгимъ основаніемъ теоріи параллельныхъ линій.

16. Мы могли бы привести множество другихъ попытокъ доказательства теоріи параллельныхъ линій; всѣ онѣ заключаютъ паралогизмы, болѣе или менѣе скрытные, или такія аксіомы, которыя нисколько не очевиднѣе основныхъ предложеній трехъ родовъ, приведенныхъ въ n° 1. Ограничимся указаніемъ на три новѣйшіе опыта по этому вопросу.

Г. Татариновъ, въ изданной имъ въ 1842 году Геометріи, удостоенной поощрительной Демидовской преміи, предложилъ способъ, основанный на перенесеніи прямыхъ линій изъ одного мѣста въ другое. Въ разборѣ этой книги, напечатанномъ въ Отчётѣ о присужденіи Демидовскихъ наградъ за 1842 годъ, подробно показано въ чёмъ состоитъ недостаточность доказательства, почему и отсылаю къ упоминаемому Отчёту.

Профессоръ Гельзингфорскаго Университета, Г. Шультенъ, напечаталъ въ 1849 году Записку подъ заглавіемъ: *Déduction de la théorie des parallèles d'un principe nouveau* *). Авторъ основываетъ свое доказательство на началѣ, которое, по его мнѣ-

---

*) *Acta Societatis Scientiarum Fennicae.* Tomi tertii, Fasciculus I, стр. 351; 1849 года.

нію, такъ же очевидно, какъ нѣкоторыя геометрическія аксіомы, не подлежащія ни малѣйшему сомнѣнію, напримѣръ: *прямая линія, заключающаяся въ плоской сомкнутой фигурѣ, непремѣнно встрѣтитъ ея обводъ;* или, *прямая линія, заключающаяся между двумя точками, короче круговой дуги, ограниченной при тѣхъ же точкахъ.* Начало, принятое Г. Шультеномъ за исходную точку въ теоріи параллельныхъ линій, слѣдующее:

Пусть будутъ c и C площади двухъ круговъ, соотвѣтственно описанныхъ радіусами r и $2r$, а e произвольно большое цѣлое число (напримѣръ 1000, 1000^{1000} *и проч.), но не зависящее отъ величины радіуса r; можно всегда выбрать для e такое значеніе, что* $e.c > C$.

Въ Запискѣ подъ заглавіемъ: *Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, напечатанной въ *Bulletin phys.-mathémat.* (Tome IX, № 4), я подробно разобралъ это начало, и показалъ, почему оно не можетъ быть принято за основаніе вопроса о параллельныхъ линіяхъ. Тамъ же замѣтилъ, что допуская другія, подобныя истины, по видимому столь же очевидныя, а въ сущности подлежащія справедливымъ возраженіямъ, легко упростить еще доказательство Г. Шультена. Допустимъ, напримѣръ, слѣдующую истину: Л. II.

Увеличивая по произволенію радіусъ CB, можно достигнуть такой величины для него, при которой площадь четверти круга DCB будетъ болѣе повторенной извѣстное число разъ площади $DCAE$ ограниченнаго прямоугольнаго двуугольника съ постояннымъ основаніемъ CA. Ф. 35.

Если обратимъ вниманіе на то̀ обстоятельство, что длина CA остается постоянною, между тѣмъ какъ радіусъ CB, а слѣдовательно и линія AB, могутъ быть увеличены по произволенію, то безъ сомнѣнія признаемъ изложенную сей-часъ истину не менѣе очевидною начала, употребленнаго Г. Шультеномъ. На такомъ основаніи докажемъ непосредственно, что наклонная CN къ линіи CA встрѣчаетъ перпендикуляръ AE. Дѣйствительно, положимъ, что уголъ DCN заключается ровно k разъ въ прямомъ углѣ *); опишемъ четверть окружности DEB такимъ радіусомъ

*) Если бъ уголъ DCN не заключался цѣлое число разъ въ прямомъ углѣ, то, руководствуясь извѣстнымъ способомъ приведенія къ противорѣчію, мы свели бы доказательство на случай k цѣлаго.

CD, чтобы площадь этой четверти круга была болѣе площади *DCAE*, повторенной *k* разъ, что̀ возможно въ силу допущенной нами истины. Такимъ образомъ получимъ

$$k \times DCAE < CDEB.$$

Съ другой стороны, такъ какъ прямая *CN*, по предположенію, не встрѣчаетъ перпендикуляра *AE*, то она должна пересѣкать дугу *DE* въ нѣкоторой точкѣ, напримѣръ въ *M*. Но какъ площадь сектора *DCM* составляетъ *k*-ю часть четверти круга *CDEB*, то и будетъ

$$k \times DCM = CDEB;$$

слѣдовательно

$$k \times DCAE < k \times DCM,$$

или

$$DCAE < DCM.$$

Очевидная несообразность этого результата доказываетъ, что допущенное предположеніе несправедливо, и что слѣдовательно наклонная *CN* встрѣтитъ перпендикуляръ *AE* между точками *A* и *E*.

Г. Христіанъ, въ небольшомъ сочиненіи, изданномъ въ 1850 году подъ заглавіемъ: *Les parallèles sans postulatum* (par S. Cristian, ancien professeur), приводитъ свои изслѣдованія о теоріи параллельныхъ линій. Онъ предлагаетъ доказательство 11-й Эвклидовой аксіомы основываясь на понятіи о движеніи угла, которое встрѣчаемъ въ опытахъ, задолго предшествовавшихъ его труду*). Помѣщаемъ здѣсь въ переводѣ основную его лемму**):

«**Основная лемма.** — Когда двѣ прямыя, заключающіяся въ одной плоскости, пересѣчены третею, такъ что одинъ изъ внутреннихъ угловъ < или > соотвѣтственнаго ему угла, то, по достаточномъ продолженіи, эти двѣ линіи пересѣкутся, именно,
Л. II. со стороны внутренняго угла въ первомъ случаѣ, а въ против-
Ф. 36. ную сторону во второмъ. — Пусть *XY*, *TZ* будутъ данныя прямыя, заключающіяся въ одной плоскости, а *RS* сѣкущая. —

---

*) См. Johannis Waillis S. T. D. de Algebra Tractatus, 1693 г. стр. 676.

**) Стр. 10 и 11 упомянутаго сочиненія Г. Христіана.

1° Положимъ $BAY < SBZ$; надобно доказать, что прямыя будучи продолжены отъ A къ Y и отъ B къ Z, непремѣнно пересѣкутся. Изъ двухъ неопредѣленныхъ прямыхъ составляемъ уголъ $bay = BAY$; наносимъ его на уголъ SBZ такъ чтобы точка a совпадала съ B, а сторона ab шла по направленію BS; въ слѣдствіе самаго предположенія другая сторона ay угла пойдетъ между BS и BZ. Положимъ теперь, что уголъ bay начинаетъ скользить въ плоскости трехъ линій XY, TZ, RS такимъ образомъ, что точка a движется отъ B къ R по прямой BR, а сторона его ab постоянно совмѣщается съ направленіемъ RS. Какъ только точка a отдѣлится отъ B, линія ay перемѣстится, и начало ея будетъ находиться за точкою B по направленію BR; слѣдовательно, эта линія ay будетъ имѣть тогда смежныя съ a точки въ углѣ RBZ, а какъ онѣ прежде находились въ углѣ SBZ, то заключаемъ, что онѣ перешли за TZ. Пусть будутъ m, n, p и проч. послѣдовательныя точки линіи ay; покажемъ, что *двѣ изъ нихъ не могутъ, при предполагаемомъ движеніи ay находиться въ одно время на TZ*. Дѣйствительно, еслибъ допустили, что точки m и n, напримѣръ, находятся обѣ на TZ, то двѣ прямыя ay, TZ совмѣщались бы во всѣхъ своихъ точкахъ, что̀ невозможно, ибо точка a уже не лежитъ на TZ. И такъ, точки m, n, p и проч. *переходятъ по-одиначкѣ чрезъ TZ, почему прямая ay будетъ пересѣкать линію TZ отъ самаго начала движенія.* Означимъ чрезъ r точку общаго ихъ пересѣченія въ то̀ время, когда a дойдетъ до точки C линіи BR; по мѣрѣ удаленія a отъ B, ar становится всё болѣе и болѣе, между тѣмъ какъ ry на столько же уменьшается; поэтому, еслибъ разсматривалась опредѣленная длина линіи ay, напримѣръ та, которая первоначально начерчена на плоскости, то часть ry подъ конецъ уничтожилась бы совершенно, и точка y перешла бы въ уголъ RBZ. Но по предположенію линія ay неопредѣленная; слѣдовательно ея длина, хотя и остается конечною, но можетъ быть взята по произволенію большою; поэтому можно дополнять ry приращеніями, равными тѣмъ, которыя последовательно получаетъ часть ar, и тогда точка y будетъ постоянно оставаться въ пространствѣ угла SBZ во всё время движенія a по направленію BR. И такъ, позволительно допустить, что длина линіи ay достаточна для того чтобы она не переста-

вала пересѣкать *TZ* въ продолженіи всего движенія точки *a* отъ *B* до *A* включительно. Но когда *a* дойдетъ до *A*, тогда уголъ *bay* совпадетъ съ равнымъ ему *BAY*, и прямая *ay* пойдетъ по направленію *AY*; слѣдовательно, продолживъ неопредѣленно *AY*, она, какъ покрывающая *ay*, вмѣстѣ съ нею встрѣтитъ *TZ*; и такъ, линія *XY* пересѣкается съ *TZ*, и именно съ той стороны, на которую выше указали. — 2⁰ Положимъ, что уголъ $BAY > SBZ$; тогда уголъ *BAX*, равный дополненію къ двумъ прямымъ въ разсужденіи угла *BAY*, будетъ менѣе угла *SBT*, служащаго дополненіемъ углу *SBZ*; но какъ въ этомъ предположеніи внутренній уголъ *BAX* менѣе соотвѣтственнаго ему *SBT*, то, подобно предъидущему, докажемъ, что *AX* пересѣчетъ *BT*. Слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ, согласно съ леммою, *XY* пересѣкается съ *TZ*».

Съ перваго взгляда доказательство Г. Христіана можетъ показаться довольно убѣдительнымъ: но, при нѣкоторомъ вниманіи увидимъ, что оно далёко не удовлетворяетъ требованіямъ желаемой строгости. Въ самомъ дѣлѣ, сужденія автора основаны на той аксіомѣ, по видимому безспорной, что прямая линія *A*, пересѣкающая другую прямую *B*, не можетъ, при извѣстномъ движеніи, отдѣлиться отъ *B*. Правда, въ подчеркнутыхъ нами мѣстахъ, Г. Христіанъ старается какъ бы оправдать это утвержденіе тѣмъ, что прямая *A* не можетъ отдѣлиться отъ *B* потому что постоянно имѣетъ съ нею только *одну* общую точку, а *двухъ* имѣть не можетъ. Здѣсь собственно и заключается неточность сужденія. И дѣйствительно, изъ того что мы не можемъ представить себѣ отдѣленіе двухъ прямыхъ при извѣстныхъ обстоятельствахъ, не слѣдуетъ еще заключить, что такое отдѣленіе невозможно. Пойдемъ даже далѣе: укажемъ на одинъ несомнѣнный случай разъединенія двухъ прямыхъ, который представляется при обстоятельствахъ, подобныхъ разсмотрѣн-
Л. II. Ф. 37. нымъ Г. Христіаномъ. Положимъ, что къ прямой *AB* возставленъ перпендикуляръ *BD*; представимъ себѣ другую, неопредѣленную прямую линію *AC*, первоначально совпадающую съ направленіемъ *AB*. Если станемъ обращать *AC* около точки *A*, принимаемой за неподвижную, отъ правой руки къ лѣвой, то эта линія приметъ послѣдовательно положенія, каковы напримѣръ

AC', AC'', AC''' и проч.; ясно, что въ каждомъ изъ этихъ положеній она будетъ пересѣкать перпендикуляръ BD въ *одной* точкѣ, именно въ m при положеніи AC', въ m' при AC'', въ m'' при AC''' и проч. Наконецъ, въ то̀ самое мгновеніе, когда перемѣнный уголъ, составляемый движущеюся прямою AC съ неподвижною AB, достигнетъ значенія, равнаго прямому углу, линія AC приметъ положеніе AE, и очевидно отдѣлится отъ перпендикуляра BD. Спрашивается, какого рода было соотносительное положеніе двухъ прямыхъ линій AC и BD въ самое мгновеніе ихъ разъединенія, или, иначе, какъ могла исчезнуть точка общаго ихъ пересѣченія? Хотя мы и не можемъ отдать себѣ яснаго отчёта въ этомъ геометрическомъ фактѣ, однакожъ дѣйствительность его тѣмъ не менѣе не подлежитъ сомнѣнію. И такъ, двѣ прямыя могутъ отдѣлиться одна отъ другой, хотя, въ продолженіи движенія, имѣли только *одну* общую точку. Въ слѣдствіе этихъ замѣчаній, доказательство Г. Христіана теряетъ всю свою силу, и въ особенности если обратимъ вниманіе еще на то̀ обстоятельство, что въ его способѣ умствованія ничто не ограничиваетъ ни величины линіи ar, ни угла CrB; такимъ образомъ, возражая про- Ф. 36.
тивъ него, скажемъ, что длина ar, при поступательномъ движеніи точки a отъ B къ A, можетъ достигнуть значенія произвольно большаго, а уголъ CrB, напротивъ того, сдѣлаться произвольно малымъ, и тогда будемъ приведены къ случаю, въ сущности не разнствующему отъ приведеннаго нами въ опроверженіе доказательства Г. Христіана.

17. Прослѣдивъ со вниманіемъ всѣ изложенные выше способы доказательства теоріи параллельныхъ линій, а равно и критическіе ихъ разборы, можно, кажется, основываясь на сущности этихъ пріёмовъ, подвести ихъ подъ слѣдующія четыре категоріи:

а) *Сравненіе безконечныхъ пространствъ, относящихся или къ угламъ, или къ двуугольникамъ.* Въ n^0n^0 6, 7 и 13 подробно разсмотрѣны тѣ затрудненія, къ которымъ приводитъ примѣненіе этого начала. Доказательства, основанныя на сравненіи безконечныхъ пространствъ, имѣютъ нетолько ту невыгоду, что заимствуясь понятіями, чуждыми сущности разсматриваемаго предмета, по своей безотчётности не убѣждаютъ насъ, но и подле-

жатъ сверхъ того возраженіямъ. И такъ, не смотря на кажущуюся простоту этого рода доказательствъ, они едва-ли могутъ быть допущены по своей неопредѣлительности и по недостатку самой строгости.

b) *Непосредственныя построенія.* Къ этому способу относится, напримѣръ, предложенное Лежандромъ доказательство теоремы о суммѣ трехъ угловъ треугольника, разсмотрѣнное нами въ n° 12; придуманное имъ построеніе основано, какъ мы видѣли, на послѣдовательномъ преобразованіи даннаго треугольника въ другіе, изъ которыхъ каждый имѣетъ съ первоначальнымъ одинаковую сумму угловъ. Въ упоминаемомъ n° объяснено, почему это остроумное доказательство лишено повидимому надлежащей строгости. — Было сдѣлано множество попытокъ, основанныхъ на способѣ непосредственныхъ построеній; но ни одна изъ нихъ не удовлетворяетъ условіямъ геометрической точности.

c) Третье начало, *начало однородности*, приводитъ различными путями къ весьма простымъ доказательствамъ теоріи параллельныхъ линій; оно состоитъ, какъ объяснено въ n° 14, въ допущеніи, что *прямолинейный уголъ не можетъ привести къ прямой линіи, опредѣленной длины.* Это начало совершенно строго, и вполнѣ убѣдительно для привыкшихъ къ нѣкоторымъ геометрическимъ соображеніямъ, относящимся къ свойствамъ кривыхъ линій. Но, по нашему мнѣнію, для начинающихъ изученіе Геометріи, оно не будетъ имѣть достаточной степени очевидности, пока не приведемъ къ элементарному виду понятія о параметрахъ кривыхъ линій. Въ n° 21 мы предложимъ нѣкоторыя новыя развитія начала однородности съ цѣлію сдѣлать его болѣе доступнымъ для начальной Геометріи.

d) Четвертаго рода опыты доказательства теоріи параллельныхъ линій основаны на *понятіи о силахъ и о движеніи.* Понятіе о силахъ, какъ совершенно чуждое Геометріи, не должно быть допущено. Что̀ же касается до движенія, разсматриваемаго единственно со стороны геометрической, то изъ него нельзя извлечь никакого новаго пособія по этому вопросу. Всѣ сужденія, основанныя на цинетмическихъ соображеніяхъ, могутъ быть всегда замѣнены геометрическими построеніями, и во всякомъ случаѣ

приведутъ къ затрудненіямъ точно такого рода, какъ и непосредственное употребленіе втораго способа, именно *способа построеній*.

18. Мы уже имѣли случай удостовѣриться въ томъ, что вся теорія параллельныхъ линій зависитъ единственно отъ одного изъ многочисленныхъ предложеній, относящихся къ линіямъ наклоннымъ, или параллельнымъ, къ треугольникамъ, четыреугольникамъ и проч. Въ n⁰ 1 приведено довольно значительное число такихъ основныхъ или характеристическихъ предложеній. Какую бы изъ этихъ истинъ не предприняли доказать, всегда встрѣчаются затрудненія, имѣющія одно и тò же начало. Чаще всего принимаютъ за основаніе теоріи параллельныхъ линій или предложеніе *о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ*, или теорему *о суммѣ трехъ угловъ треугольника*.

Когда имѣемъ въ виду доказать предложеніе *о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ*, то, какой-бы пріёмъ не употребляли, всегда представляется одно затрудненіе: оно происходитъ оттого что мы не отличаемъ, явнымъ образомъ, наклонной, которая должна пересѣкать перпендикуляръ, отъ кривой, обращенной своею выпуклостію къ этому перпендикуляру, и слѣдовательно не устраняемъ возможности, чтобы двѣ линіи, наклонныя одна къ другой, не пересѣкались. Дѣйствительно, пока мы не ввели въ наши сужденія отличительнаго признака прямой линіи, который исключалъ бы всякое сходство наклонной, по виду ея, съ кривою, обращенною выпуклой своей стороной къ перпендикуляру, до тѣхъ поръ не отрицается и возможность, чтобъ положеніе перпендикуляра относительно наклонной было сопровождаемо тѣми же обстоятельствами, какъ положеніе ассимптоты относительно безконечной вѣтви кривой. Въ этомъ собственно, по нашему мнѣнію, и заключается главное затрудненіе.—Недостаточность обыкновенныхъ способовъ обнаруживается подобнымъ образомъ, и сопровождается тѣми же обстоятельствами, когда, за исходную точку теоріи параллельныхъ линій принимаемъ теорему *о суммѣ трехъ угловъ треугольника*. И въ самомъ дѣлѣ, въ сужденіяхъ, употребляемыхъ для доказательства, что сумма трехъ угловъ треугольника не можетъ быть меньше двухъ прямыхъ угловъ, не исключается возможность, по крайней мѣрѣ явно, чтобы три стороны треугольника, или двѣ, или одна сто-

*

рона, имѣла видъ дуги кривой, обращенной выпуклостію своею внутрь треугольника. Возможность же вогнутаго вида дуги устранена заранѣе, потому что доказываютъ, со всею строгостію, что сумма трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ.

Открывъ такимъ образомъ сущность постоянно встрѣчаемаго затрудненія, представляется вопросъ о томъ, какъ устранить его. Всего естественнѣе было бы, съ перваго пріёма, исключить всякое возможное сходство между прямою линіей и кривою выпуклой, о которой говорено выше; но такое исключеніе, при средствахъ, допускаемыхъ въ начальной Геометріи, врядъ ли исполнимо. Поэтому, я старался обойти затрудненіе другимъ путемъ. Въ каждомъ изъ двухъ слѣдующихъ за симъ опытовъ новой теоріи параллельныхъ линій, я сперва доказываю одно предложеніе, справедливость котораго не требуетъ чтобъ предварительно исключили кривой видъ разсматриваемыхъ линій; потомъ, переходя извѣстнымъ образомъ къ предѣлу, выражаю что эти самыя линіи, которыя не были еще отличены по ихъ свойству, стремятся къ виду прямыхъ. Съ достиженіемъ этой цѣли устраняется и самое затрудненіе. Обозначенный здѣсь ходъ сужденій я старался по возможности объяснить въ *примѣчаніяхъ*, сопровождающихъ изложеніе каждаго изъ двухъ способовъ.

Новыя доказательства очень элементарны, и не заключаютъ въ себѣ никакихъ особенныхъ отвлеченностей. Всё что говорится о прямой, которая могла бы, *in abstracto*, принять видъ выпуклой кривой, назначено только для математиковъ, и можетъ быть выпущено начинающими изученіе Геометріи. Опытные преподаватели этой науки легко могли бы ввести въ элементарные курсы предлагаемые способы при самыхъ незначительныхъ измѣненіяхъ въ слѣдующемъ за симъ изложеніи.

19. Начнемъ съ доказательства характеристическаго свойства равноотстоянія параллельныхъ линій.

Предложеніе 1ое.

Л. II. Ф. 38. Пусть будутъ AL и BK двѣ параллельныя прямыя, перпендикулярныя къ основанію AB. Если отъ точекъ A и B, по на-

правленіямъ AL, BK, отложимъ двѣ равныя длины $AA' = BB'$, и соединимъ A' съ B' прямою $A'B'$, то линія $A'B'$ не можетъ быть менѣе основанія AB.

Доказательство. На продолженномъ неопредѣленно основаніи AB возьмемъ $BC = CD = DE = \ldots = AB$. Изъ точекъ дѣленія C, D, $E \ldots$ возставимъ перпендикуляры, по направленію которыхъ отложимъ длины CC', DD', $EE' \ldots$ всѣ равныя AA'. Соединимъ потомъ B' съ C', C' съ D', D' съ E' и проч. Очевидно, что длины $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E' \ldots$ будутъ всѣ равны между собой. Пусть будетъ c общая ихъ величина, a длина основанія AB, и b высота $AA' = BB' = CC' = \ldots = EE'$. Сверхъ того положимъ, что число равныхъ частей AB, BC, CD, $DE \ldots$ есть m. По свойству прямой линіи длина AE будетъ короче ломаной линіи $AA'B'C'D'E'E$; слѣдовательно

$$AA' + A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'E > AE,$$

и какъ

$$AA' = E'E = b,\ A'B' = B'C' = C'D' = \ldots = c,\ AE = ma,$$

то и получимъ

$$2b + mc > ma,$$

откуда

$$c > a - \frac{2b}{m}.$$

Это неравенство показываетъ очевиднымъ образомъ, что предположеніе $c < a$ допущено быть не можетъ; дѣйствительно, еслибъ утверждали, что $c = a - D$, разумѣя подъ D избытокъ величины a предъ c, то оказалось бы

$$a - D > a - \frac{2b}{m},$$

или

$$D < \frac{2b}{m}.$$

Послѣднее неравенство невозможно, потому что m число произвольно большое, въ слѣдствіе чего дробь $\frac{2b}{m}$, имѣющая постоянный числитель, можетъ быть сдѣлана менѣе всякой ощутительной величины. И такъ, прямая $A'B' = c$ не можетъ быть менѣе основанія $AB = a$.

Ф. 38. **Лемма.** Если изъ точки A' опустимъ на BB' перпендикуляръ $A'P$, то и этотъ перпендикуляръ $A'P$ не можетъ быть меньше основанія AB.

Чтобъ доказать это свойство, примемъ въ разсмотрѣніе ту часть *фигуры 38*, которая заключаетъ въ себѣ перпендикуляръ $A'P$. Обративъ четыреугольникъ $ABB'A'$ около стороны его AA',
Л. II. Ф. 39. получимъ фигуру $SBB'T$; перпендикуляръ $A'P$ приметъ положеніе $A'P'$, при чемъ $P'S = PB$. Замѣтимъ, что линія $A'P$, какъ перпендикулярная къ BB', короче линіи $A'B'$, имѣющей, по предположенію, наклонное положеніе въ разсужденіи BB'. Чтобъ показать теперь, что перпендикуляръ $A'P$ не можетъ быть меньше основанія $AB = a$, соединимъ точки P и P' прямою PP'; въ силу предложенія 1-го заключаемъ непосредственно, что длина PP' не можетъ быть меньше линіи $BS = 2a$, принимаемой за основаніе двухъ параллельныхъ BB' и ST. Но, съ другой стороны, ломаная линія $P'A' + A'P > P'P$, то есть $2A'P > P'P$, или $A'P > \frac{P'P}{2}$; наконецъ, такъ какъ $P'P$ не можетъ быть менѣе $2a$, то и перпендикуляръ $A'P$ не будетъ менѣе $\frac{2a}{2} = a$, то есть основанія AB двухъ параллельныхъ линій AA' и BB'.

Ф. 39. **Слѣдствіе.** Всякая прямая линія LM, ограниченная двумя параллельными линіями BB', ST, не можетъ быть меньше ихъ основанія BS, ибо она длиннѣе перпендикуляра LN, опущеннаго изъ точки L на линію ST, который самъ не можетъ быть короче BS.

Примѣчаніе. Доказанное предложеніе 1-ое въ сущности не отличается отъ теоремы, въ слѣдствіе которой сумма трехъ угловъ треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ. Доказательство этого свойства, какъ извѣстно, не подлежитъ никакому затрудненію. Переходимъ теперь ко второму предложенію, которое, въ какомъ бы видѣ его не представляли, всегда подавало поводъ къ справедливымъ возраженіямъ.

Предложеніе 2ое.

Л. III. Ф. 40. Пусть будутъ, какъ выше, AL и BK двѣ прямыя параллельныя, а $AB = a$ ихъ основаніе. На продолженной линіи AB откладываемъ части BC, CD, DE.... равныя AB; означимъ чрезъ m число этихъ дѣленій. Далѣе, возьмемъ на прямой AL длину

$AA' = b$, и изъ крайней точки E возставимъ къ AE перпендикуляръ $EE' = AA' = b$. Соединимъ потомъ крайнія точки A' и E' прямою $A'E'$. Если изъ промежуточныхъ точекъ C, D.... возставимъ перпендикуляры къ AE, то они пересѣкутъ линію $A'E'$ въ нѣкоторыхъ точкахъ C', D'.... Такимъ образомъ линія $A'E'$ раздѣлится на m частей $A'B'$, $B'C'$.... $D'E'$, которыя, при рѣшеніи вопроса въ самомъ общемъ смыслѣ, очевидно нельзя принимать равными между собой. Пусть будетъ

$$A'B' = c_1,\ B'C' = c_2,\ C'D' = c_3 \ldots.\ D'E' = c_m.$$

На такомъ основаніи утверждаемъ, что между длинами c_1, c_2, $c_3 \ldots\ c_m$ найдется по крайней мѣрѣ одна, величина которой, при возрастающихъ значеніяхъ числа m, будетъ приближаться по произволенію къ длинѣ основанія a.

Доказательство. Такъ какъ линія $A'E'$ прямая, то длина ея будетъ менѣе суммы трехъ прямыхъ $A'A + AE + EE'$. Слѣдовательно

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots. + c_m < ma + 2b.$$

Чтобы вести доказательство въ самомъ общемъ предположеніи, должно допустить, 1^0 что длины c_1, c_2, $c_3 \ldots.$ могутъ быть всѣ неравныя между собой, считая ихъ отъ одной изъ крайнихъ точекъ A' или E' до средины прямой AE; 2^0 что нѣкоторыя изъ нихъ неравны между собой, и 3^0 что всѣ эти части равны. Мы можемъ заключить эти три случая въ одинъ, изобразивъ чрезъ c наимѐньшую изъ частей c_1, c_2, $c_3 \ldots.\ c_m$ когда онѣ не всѣ равны между собой, и удержавъ тò же самое означеніе c для общей величины этихъ частей въ случаѣ ихъ равенства.

Замѣнимъ, въ предъидущемъ неравенствѣ, каждую изъ частей c_1, c_2, $c_3 \ldots.\ c_m$ наимѐньшею изъ нихъ c; получимъ

$$mc \leqq c_1 + c_2 + c_3 + \ldots. + c_m,$$

и слѣдовательно также

$$mc \leqq ma + 2b,$$

откуда

$$c \leqq a + \frac{2b}{m}.$$

Вспомнимъ теперь, что въ силу слѣдствія **1-го предложенія**, c не можетъ быть менѣе a; слѣдовательно величина c, наимѐнь-

шая изъ частей $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$..... $D'E'$, будетъ постоянно заключаться между двумя предѣлами

$$a \text{ и } a + \frac{2b}{m}.$$

Съ другой эстороны, такъ какъ при неопредѣленномъ увеличеніи числа m, дробь $\frac{2b}{m}$ неопредѣленно приближается къ нулю, то и слѣдуетъ заключить, что необходимо существуетъ величина c, по произволенію близкая къ a, такъ что можно принять въ строгомъ смыслѣ $c = a$. Отсылаемъ читателей къ болѣе подробнымъ развитіямъ относительно этого заключенія, помѣщеннымъ въ *примѣчаніи*, въ концѣ n⁰ 20.

Такимъ образомъ доказано существованіе нѣкоторой прямой, примыкающей къ двумъ разсматриваемымъ параллельнымъ линіямъ, и длина которой равна ихъ основанію. Покажемъ теперь, что основываясь на равенствѣ $c = a$, можно очень просто доказать свойство равноотстоянія параллельныхъ линій.

Л. III. Ф. 41. Пусть будетъ $AB = a$ основаніе двухъ разсматриваемыхъ параллельныхъ линій AL и BK, а $CD = c = a$ наименьшая изъ частей c_1, c_2, c_3.... c_m, о которыхъ говорено выше. Если изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CP на линію BK, то этотъ перпендикуляръ, въ силу леммы 1-го предложенія, не можетъ быть меньше a; но какъ $CD = c = a$, то и нельзя предположить, чтобы линія CD имѣла наклонное положеніе относительно BK; въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ получили бы $CD > CP$, или $a > CP$, что несправедливо по той причинѣ, что прямая CP не можетъ быть менѣе основанія a. Слѣдовательно CD совпадаетъ съ CP, почему $CP = a$, и уголъ BDC будетъ прямой. Такъ же легко показать, что и уголъ ACD или ACP прямой; и дѣйствительно, еслибъ онъ не былъ прямымъ, то можно бы было изъ точки P опустить перпендикуляръ PQ на линію AL; тогда надлежало бы допустить, что прямая PC, равная a, какъ наклонная къ AL, болѣе PQ, почему $PQ < PC$ или $PQ < a$, что опять невозможно въ силу прежней леммы. И такъ, PQ совпадаетъ съ PC, и мы получимъ прямую CP, которая будетъ въ одно время перпендикулярна къ обѣимъ параллельнымъ линіямъ AL, BK, и, сверхъ того, будетъ равна основанію AB. Очевидно впрочемъ, что имѣемъ также $AC = BP$.

Послѣ сказаннаго, легко показать, что всякая линія ST, соединяющая точки S и T, взятыя на равныхъ разстояніяхъ $AS = BT$ отъ A и B, будетъ равна основанію AB. Такъ какъ по предположенію $CP = a$, и притомъ углы при C и P прямые, то можно провести вторую линію $C'P'$, удовлетворяющую тѣмъ же условіямъ, и проходящую чрезъ такія точки C' и P', для которыхъ $CC' = AC$, $PP' = BP$. Совершенно такимъ же образомъ получимъ третью линію $C''P''$, равную AB или a; углы при C'' и P'' будутъ прямые, а разстоянія AC'', BP'' отъ основанія AB втрое болѣе линіи $AC = BP$. Надлежащее число повтореній этого самаго построенія приведетъ насъ наконецъ до такой линіи $A'B'$, которая перейдетъ за данную прямую ST; эта линія $A'B'$ будетъ перпендикулярна къ обѣимъ параллельнымъ AL и BK, а длина ея равна основанію $AB = a$. Такимъ образомъ получится прямоугольникъ $ABA'B'$, въ которомъ каждыя двѣ противоположныя стороны будутъ взаимно равны. Надобно показать 1° что линія ST составляетъ прямые углы съ каждою изъ параллельныхъ AA' и BB', и 2° что эта линія ST равна основанію AB. Л. III. Ф. 42. Л. III. Ф. 43.

Отрицая перпендикулярность ST къ AA' и BB', должно допустить другіе перпендикуляры къ ST, какъ напримѣръ QQ' и RR'. Эти два перпендикуляра необходимо должны встрѣтить или основаніе AB, или линію $A'B'$ внутри пространства, заключающагося между двумя разсматриваемыми параллельными. Пусть будутъ Q и R точки встрѣчи. Такимъ образомъ получимъ двѣ новыя параллельныя линіи SQ и TR, имѣющія основаніемъ прямую ST, ибо углы QST и RTS оба прямые по предположенію. Но выше было доказано, что линія QR не можетъ быть менѣе основанія ST; слѣдовательно прямая QR будетъ болѣе, или развѣ только равна ST, почему и получится условіе

$$QR \geqq ST.$$

Съ другой же стороны, разсматривая прямую ST какъ принадлежащую системѣ двухъ параллельныхъ линій AA' и BB', имѣющихъ основаніемъ своимъ AB, должны имѣть

$$ST \geqq AB,$$

и слѣдовательно

$$QR \geqq AB.$$

Но какъ построеніе показываетъ, что прямая QR не можетъ быть болѣе AB, то и слѣдуетъ заключить, что $QR = AB$, или, иначе, что углы AST и BTS оба прямые. Равенство $ST = AB$ есть уже необходимое слѣдствіе сказаннаго. Дѣйствительно, принявъ сперва AB за основаніе параллельныхъ линій AA' и BB', получимъ

$$ST \geqq AB;$$

съ другой стороны, наблюдая, что ST есть основаніе параллельныхъ SA и TB, заключимъ, что

$$AB \geqq ST.$$

Сличеніе послѣднихъ двухъ неравенствъ ведетъ прямо къ слѣдствію $ST = AB$, выражающему отличительное свойство равноотстоянія линій параллельныхъ, которое мы и имѣли въ виду доказать.

Примѣчаніе. Приведемъ теперь нѣкоторыя соображенія для подтвержденія сказаннаго въ предъидущемъ n° 18 о томъ, что въ употребляемыхъ сужденіяхъ не отличаютъ вообще характеристическими признаками прямой линіи отъ выпуклой кривой.
Л. III. Ф. 40 и 44. Обратимся съ этою цѣлію къ *фигурѣ 40-й* предложенія 2-го. Наше сужденіе основывалось на томъ, что линія $A'E'$ короче длины $A'A + AE + EE'$; но, ни въ одномъ изъ умозаключеній, ведущихъ къ доказательству 2-го предложенія, мы не выразили, явнымъ образомъ, что эта линія $A'E'$ непремѣнно *прямая*. Всякая *кривая, выпуклая въ отношеніи къ* AE, какъ напримѣръ $A'PE'$, $A'QE'$..., или даже *ломаная выпуклая линія* $A'RE'$, удовлетворяетъ тому условію, что она короче объемлющей ее линіи, длина которой выражается суммою $A'A + AE + EE'$. О вогнутыхъ кривыхъ, каковы $A'P'E'$, $A'Q'E'$...., или о ломаной вогнутой $A'R'E'$, того уже нельзя сказать вообще, потому что длина разсматриваемой линіи могла бы быть болѣе суммы $A'A + AE + EE'$. Такимъ образомъ, по самому свойству сужденія, всякое сходство прямой съ вогнутымъ видомъ кривой было устранено. Слѣдовательно, предложеніе 2-е справедливо не только для прямой $A'E'$, но и для всякой выпуклой кривой, а равно и выпуклой ломаной линіи, соединяющей точки A' и E'. Въ дальнѣйшихъ только сужденіяхъ, именно при переходѣ къ предѣлу, мы окончательно отличили прямую линію отъ выпуклой кривой, что̀ и объяснено подробно въ концѣ слѣдующаго n° 20.

20. Переходимъ теперь къ доказательству теоремы о суммѣ трехъ угловъ треугольника.

Предложеніе А.

Сумма трехъ угловъ прямоугольнаго треугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ.

Доказательство. Можно доказать это предложеніе непосредственно, какъ напримѣръ сдѣлалъ Лежандръ въ мемуарѣ, на который мы ссылались уже нѣсколько разъ (стр. 369). Еще проще достигнемъ той же цѣли, основываясь на слѣдствіи предъидущаго n° 19. Дѣйствительно, пусть будетъ ABC данный прямоугольный треугольникъ; возставимъ изъ A перпендикуляръ AL къ AB, и проведемъ линію $AB' = BC$ такъ, чтобы уголъ $B'AC$ былъ равенъ углу ACB. Если допустимъ, что сумма трехъ угловъ даннаго треугольника болѣе двухъ прямыхъ угловъ, то линія AB' будетъ очевидно находиться, какъ означено на чертежѣ, внѣ пространства двуугольника $LABK$. Соединивъ B' съ C, получимъ треугольникъ $CB'A$, равный треугольнику ABC, ибо каждый изъ нихъ имѣетъ по равному углу, заключающемуся между двумя взаимно равными сторонами. Равныя стороны будутъ гипотенуза AC и катетъ $AB' = BC$; слѣдовательно и третья сторона $B'C = AB$. Но мы знаемъ, что линія DC, примыкающая къ двумъ параллельнымъ AL и BK, не можетъ быть менѣе основанія AB (слѣдствіе n° 19); поэтому Л. III. Ф. 45.

$$DC \geqq AB;$$

съ другой стороны имѣемъ по строенію

$$B'C > DC,$$

и слѣдовательно

$$B'C > AB,$$

что противорѣчитъ условію $B'C = AB$. И такъ, сумма трехъ угловъ прямоугольнаго треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ,

Слѣдствіе. Очень легко удостовѣриться, что доказанное предложеніе справедливо и для какого ни есть треугольника. Дѣйствительно, если изъ вершины C даннаго треугольника ABC опустимъ перпендикуляръ CD на сторону AB, то получимъ два треугольника ACD и BCD, прямоугольные при D. Изобразивъ Л. III. Ф. 46.

чрезъ d прямой уголъ, найдется, въ силу доказаннаго сей-часъ предложенія,

$$a + e + d \leqq 2d \quad \text{и} \quad b + f + d \leqq 2d.$$

Сумма этихъ двухъ неравенствъ доставитъ

$$a + e + f + b \leqq 2d,$$

что̀ и слѣдовало доказать.

Предложеніе B.

Можно построить такой треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ будетъ по произволенію мало разнствовать отъ двухъ прямыхъ угловъ.

Л. III. Ф. 47. **Доказательство.** Изъ точки B произвольной прямой AB возставимъ неопредѣленный перпендикуляръ BK. Положимъ, что на этой линіи BK взяли какое ни есть число m точекъ C, C', C'', C'''.... на равныхъ или неравныхъ между собою разстояніяхъ. Если соединимъ C, C', C'', C'''.... съ точкою A, то получимъ m треугольниковъ

$$ABC,\ ACC',\ AC'C'',\ AC''C''' \ldots.$$

Означимъ чрезъ s_1 сумму трехъ угловъ перваго треугольника ABC, чрезъ s_2 ту же сумму въ разсужденіи втораго треугольника ACC', и такъ далѣе до послѣдняго, положимъ $AC''C'''$; для котораго сумма угловъ изобразится чрезъ s_m. Сверхъ того, пусть будутъ a и c острые углы треугольника ABC''', вмѣщающаго въ себѣ всѣ составные треугольники, а d прямой уголъ при B; для полной суммы угловъ всѣхъ m треугольниковъ получимъ выраженіе

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots . + s_m = (m - 1).\ 2d + d + a + c;$$

членъ $(m-1).2d$ относится къ промежуточнымъ точкамъ C, C', C''...., число которыхъ равно $m-1$. Дѣйствительно, такъ какъ каждая изъ точекъ C, C', C''.... означаетъ общую вершину двухъ смежныхъ угловъ, принадлежащихъ двумъ соприкосновеннымъ между собой треугольникамъ, то удвоенный прямой уголъ повторится $m-1$ разъ.

Дадимъ предъидущему уравненію видъ

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots . + s_m = 2md - (d - a - c),$$

и замѣтимъ, что разность $d - a - c$, которую означимъ чрезъ b, изобразитъ уголъ, заключающійся между *нулемъ* и *прямымъ угломъ*. Послѣднее утвержденіе есть непосредственное слѣдствіе предложенія А, въ силу котораго сумма $a + c$ не превышаетъ прямаго угла. И такъ

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m = 2md - b,$$

при условіяхъ

$$b \geqq o \text{ и } b < d.$$

Теперь представляются два предположенія относительно величинъ s_1, s_2, $s_3 \ldots s_m$: или всѣ онѣ равны между собою, или не всѣ, включая во второе предположеніе и тотъ случай, когда количества s_1, s_2, $s_3 \ldots$ всѣ различны. Въ первомъ предположеніи доказываемъ непосредственно, что сумма трехъ угловъ каждаго изъ разсматриваемыхъ треугольниковъ равна двумъ прямымъ угламъ. Дѣйствительно, пусть будетъ s общее значеніе величинъ s_1, s_2, $s_3 \ldots s_m$; получимъ

$$ms = 2md - b \text{ или } s = 2d - \frac{b}{m}.$$

Если возьмемъ теперь, въ томъ же треугольникѣ ABC''', новую точку Q между B и C''', то, по соединеніи ея съ A прямою AQ, получимъ, вмѣсто прежнихъ m, $m + 1$ составныхъ треугольниковъ. Такъ какъ s и b не перемѣнились, то найдется какъ выше

$$s = 2d - \frac{b}{m+1};$$

но эта величина для s несовмѣстна съ предъидущею

$$s = 2d - \frac{b}{m},$$

развѣ только b обратится въ нуль. Слѣдовательно $s = 2d$, что̀ и имѣли въ виду показать.

Разсмотримъ теперь второе предположеніе. Если между величинами s_1, s_2, $s_3 \ldots s_m$ найдутся неравныя, то означимъ чрезъ s наибо́льшую изъ нихъ. Тогда очевидно будетъ

$$ms > s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_m,$$

и поэтому

$$ms > 2md - b,$$

откуда

$$s > 2d - \frac{b}{m}.$$

Но какъ въ силу предложенія А сумма s трехъ угловъ треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ, то и заключаемъ, что эта сумма s будетъ заключаться между предѣлами $2d$ и $2d-\frac{b}{m}$, такъ что

$$s<2d \quad \text{и} \quad s>2d-\frac{b}{m}.$$

Замѣтимъ теперь, что при неопредѣленномъ увеличеніи числа m, дробь $\frac{b}{m}$ будетъ неопредѣленно уменьшаться, ибо числитель ея b есть величина или постоянная, или перемѣнная, но во всякомъ случаѣ не превышающая прямаго угла d. И такъ, $\frac{b}{m}$ можетъ быть сдѣлано менѣе всякой данной величины, изъ чего и заключаемъ, что непремѣнно существуетъ такой треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ разнствуетъ отъ двухъ прямыхъ какъ угодно мало. Слѣдовательно, переходя къ предѣлу, получимъ $s=2d$, въ чёмъ и состоитъ предложеніе В.

1-е Примѣчаніе. Предложеніе В можно доказать разнообразными пріёмами, основанными на употребленномъ сей-часъ началѣ. Такъ, напримѣръ, достигаемъ цѣли разлагая какой ни

Л. III. Ф. 48. есть треугольникъ ABC на 2^m составныхъ треугольниковъ слѣдующимъ образомъ: опускаемъ послѣдовательно сперва *одинъ* перпендикуляръ CD на AB, потомъ *два* перпендикуляра DE и DF на CB и AC, далѣе, *четыре* перпендикуляра EG, EI, FH и FJ на CD, BD, CD и AD, и проч.; при такомъ построеніи число перпендикуляровъ будетъ очевидно увеличиваться въ удвоенномъ содержаніи. Если означимъ чрезъ s сумму угловъ того треугольника, для котораго она имѣетъ наибóльшее значеніе, а чрезъ l сумму $A+B+C$ угловъ первоначальнаго треугольника, то получимъ

$$2^m.s>(2^m-1).2d+l,$$

откуда

$$s>2d-\frac{2d-l}{2^m},$$

а изъ этого неравенства выведемъ уже очень просто тò же самое заключеніе какъ и выше.

Разсматриваніе ряда треугольниковъ, построенныхъ между двумя параллельными линіями, привело бы насъ къ тому же самому результату.

2-е Примѣчаніе. Замѣтимъ и здѣсь, какъ уже объяснено по поводу 2-го предложенія (n° 19), что въ доказательствѣ пред-

ложенія B мы не выразили условія, по которому бы линіи AC, AC', AC''.... (*фиг.* 47) были непремѣнно прямыя. Основное уравненіе

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots. + s_m = 2md - b$$

будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда замѣнимъ прямыя AC, AC', AC''.... какими ни есть кривыми линіями, выпуклыми или вогнутыми въ отношеніи къ AB, и образующими рядъ соприкосновенныхъ треугольниковъ, не переступающихъ одинъ за другой. Возможность криволинейнаго вида сторонъ треугольниковъ мы устранили уже послѣ, именно когда перешли къ предѣлу, и приняли въ соображеніе тò условіе, что сумма угловъ прямолинейнаго треугольника не можетъ превышать двухъ прямыхъ угловъ. Этимъ самымъ мы выразили настоящія требованія вопроса.

На основаніи предложенія B очень легко уже доказать теорему о суммѣ угловъ какого ни есть треугольника. Можно употребить или способъ Лежандра*), или слѣдующій, который, кажется, еще проще.

Положимъ, что ABC означаетъ именно тотъ треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ. Если изъ вершины его C опустимъ перпендикуляръ CD на AB, то каждый изъ двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ ADC и BDC будетъ также пользоваться тѣмъ же самымъ свойствомъ относительно суммы угловъ. Дѣйствительно, такъ какъ въ силу предложенія A имѣемъ Л. III. Ф. 46.

$$a + e + d \leqq 2d \quad \text{и} \quad b + f + d \leqq 2d,$$

или

$$a + e \leqq d \quad \text{и} \quad b + f \leqq d,$$

то сложивъ эти два неравенства получимъ

$$a + e + f + b \leqq 2d.$$

Но, по самому предположенію, $a + e + f + b = 2d$; слѣдовательно, въ предъидущихъ неравенствахъ надлежитъ допустить знакъ $=$, почему и будетъ

$$a + e + d = 2d \quad \text{и} \quad b + f + d = 2d.$$

Такимъ образомъ удостовѣряемся въ существованіи *прямо-*

---

*) Смот. въ упомянутомъ выше мемуарѣ Лежандра стр. 375.

угольнаго треугольника, въ которомъ сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Докажемъ теперь, что сумма угловъ *прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника*, съ сторонами произвольно большими, равна также двумъ прямымъ угламъ.

Л. III. Ф. 49. Пусть будетъ ADC тотъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ. Допустимъ, что AD есть мѐньшая сторона треугольника; отложимъ $DE = AD$, и соединимъ A съ E прямою AE. Такимъ образомъ получимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ AED, въ которомъ острые углы при A и E равны между собой. Докажемъ, что сумма этихъ двухъ угловъ равна углу прямому, и что слѣдовательно каждый изъ нихъ имѣетъ мѣрою половину прямаго угла. Съ этою цѣлію разсмотримъ треугольникъ ACE; такъ какъ сумма трехъ угловъ его $a - e$, c, $2d - e$ не можетъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ, то получимъ

$$a - e + c + 2d - e \leqq 2d,$$

или

$$a + c \leqq 2e.$$

Съ другой стороны, имѣемъ по предположенію

$$d = a + c;$$

слѣдовательно

$$d \leqq 2e.$$

Но сумма $2e$ двухъ угловъ при A и E треугольника ADE не можетъ быть болѣе прямаго угла, почему необходимо допустить равенство $d = 2e$, или $e = \frac{1}{2}d$. Такимъ образомъ доказано существованіе *равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника* ADE, въ которомъ сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Теперь уже легко построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, произвольнаго размѣра, пользующійся тѣмъ же свойствомъ относительно суммы угловъ, какъ и первоначальный ADE.
Л. III. Ф. 50. Обратимъ треугольникъ ADE около стороны его ED; получимъ новый равнобедренный прямоугольный треугольникъ AEA', вдвое бо́льшій прежняго. Обративъ треугольникъ AEA' около стороны его $A'E$, составимъ треуголь-

никъ $AA'A''$, вдвое бо́льшій треугольника AEA', и слѣдовательно вчетверо бо́льшій первоначальнаго AED. Этотъ треугольникъ $AA'A''$, подобно предъидущимъ, будетъ равнобедренный и прямоугольный при A'; сумма угловъ его равна также двумъ прямымъ угламъ. Продолжая показанное построеніе, получимъ наконецъ треугольникъ произвольно большаго размѣра, и удовлетворяющій всѣмъ приведеннымъ выше условіямъ.

Пусть будетъ теперь какой ни есть прямоугольный треугольникъ ABC, съ прямымъ угломъ при B. Построимъ на продолженныхъ его сторонахъ BA и BC равнобедренный прямоугольный треугольникъ LBK, въ которомъ сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ. Принявъ въ соображеніе, что сумма четырехъ угловъ четыреугольника $LACK$, какъ разложимаго на два треугольника, не можетъ превышать четырехъ прямыхъ угловъ, очевидно получимъ Л. III. Ф. 51.

$$\tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}d + (2d - a) + (2d - c) = 5d - a - c \leqq 4d,$$

или

$$d \leqq a + c.$$

Но, съ другой стороны, такъ какъ сумма $a + c$ не можетъ быть болѣе d, то и слѣдуетъ заключить, что $a + c = d$, или, иначе, что сумма трехъ угловъ *въ какомъ ни есть прямоугольномъ треугольникѣ* ABC равна двумъ прямымъ угламъ.

Наконецъ, имѣя какой ни есть треугольникъ ABC, разлагаемъ его на два прямоугольные ACD и BCD. Въ слѣдствіе доказаннаго предъ симъ, получимъ $a + e = d$, $f + b = d$; и такъ Л. III. Ф. 46.

$$a + e + f + b = 2d.$$

Это послѣднее равенство выражаетъ, что *сумма трехъ угловъ въ какомъ ни есть треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ*, что́ и имѣли въ виду доказать.

Основываясь на этой теоремѣ, можно доказать предложеніе о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ слѣдующимъ, весьма простымъ образомъ: положимъ, что AB есть предѣлъ разстоянія, на которомъ по предположенію наклонная AD къ AB уже не встрѣчаетъ перпендикуляра BC къ AB. И такъ, мы допускаемъ, что всякая другая наклонная, составляющая тотъ же уголъ a съ AB, но проходящая на разстояніи отъ Л. III. Ф. 52.

точки B, меньшемъ нежели AB, пересѣкаетъ линію BC. Опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BE на AD; такъ какъ уголъ AEB прямой, почему сумма двухъ угловъ a и b треугольника ABE также равна прямому углу, то окажется, что уголъ $EBC = a$. Съ другой же стороны очевидно, что $BE < AB$; слѣдовательно, прямая BC непремѣнно пересѣчетъ линію AD.

Примѣчаніе. Предложенные нами два способа доказательства теоріи параллельныхъ линій подвергнутся, можетъ быть, одному возраженію, которое мы постараемся предупредить нѣкоторыми объясненіями. Всякій, нѣсколько знакомый съ этою теорію, съ перваго взгляда усмотритъ, что поводъ къ возраженію можетъ подать только заключеніе, выводимое или изъ предложенія 2-го (n^0 19), или изъ предложенія B (n^0 20). Такъ какъ сущность затрудненія одинакова въ обоихъ случаяхъ, то мы займемся только однимъ изъ нихъ, напримѣръ первымъ.

Вспомнимъ, было сказано, что переходя къ предѣлу, то есть принимая $m = \infty$, устраняемъ вмѣстѣ съ тѣмъ сходство прямой линіи съ кривою. Дѣйствительно, пока число m конечное,
Л. III. Ф. 44. самыя разстоянія AE и $A'E'$ будутъ конечныя, и въ употребленныхъ нами сужденіяхъ мы не находимъ ничего, что могло бы устранить, въ отвлеченномъ смыслѣ, видъ выпуклой кривоій $A'PE'$ къ AE для линіи, соединяющей точку A' съ E'. Но при $m = \infty$, точки A' и E' безконечно удалены одна отъ другой, и тогда прямо обнаруживается невозможность, чтобы вся линія $A'E'$, объемлемая безконечною ломаною $A'A + AE + EE'$, имѣла, на всемъ своемъ протяженіи, видъ выпуклой кривой въ разсужденіи AE. Допущеніе противнаго совершенно противорѣчило бы первоначальнымъ нашимъ понятіямъ о прямой и кривыхъ линіяхъ. При строгомъ воззрѣніи на предметъ, должно разсматривать эту линію $A'E'$, при $m = \infty$, какъ имѣющую видъ выпуклой кривой, но съ безконечно малою кривизною, при чёмъ ближайшее ея разстояніе отъ прямой AE будетъ находиться въ срединѣ этой самой линіи AE. Вникнувъ въ доказательство, увидимъ, что собственно здѣсь представляется возраженіе, по поводу котораго мы и войдемъ теперь въ нѣкоторыя подробности.

Обратимся къ тому мѣсту нашего текста, гдѣ, послѣ доказательства 2-го предложенія, мы заключили, что длина, изо-

браженная чрезъ c (*фиг. 40*), равна основанію a разсматриваемыхъ параллельныхъ линій. Примемъ въ соображеніе неравенство

$$c < a + \frac{2b}{m},$$

и вспомнимъ свойство, доказанное со всею строгостію, что линія c не можетъ быть менѣе a. Слѣдовательно, длина c будетъ постоянно заключаться между предѣлами

$$a \text{ и } a + \frac{2b}{m},$$

разумѣя подъ b величину постоянную, а подъ m цѣлое число, произвольно большое. И такъ, несомнѣнно, что можно получить для c величину, разнствующую отъ a произвольно мало. Вопросъ состоитъ въ томъ, имѣемъ-ли право принять эти двѣ линіи c и a въ строгомъ смыслѣ равными между собой? Равенство конечно имѣетъ мѣсто при $m = \infty$; но не можетъ-ли случиться, что до достиженіи этого предѣла линія c будетъ, по положенію своему, приближаться къ прямой AE по мѣрѣ увеличенія m, и что окончательно, при $m = \infty$, она совпадетъ съ однимъ изъ дѣленій AB, BC, CD, DE....? Въ этомъ предположеніи разстояніе AC (*фиг. 41*), существованіе котораго необходимо для нашего доказательства, исчезнетъ, и всѣ дальнѣйшія заключенія потеряютъ свою силу.

На это мы отвѣчаемъ, что линія c, въ строгомъ смыслѣ, не можетъ совмѣститься ни съ однимъ изъ дѣленій AB, BC, CD.... неопредѣленной прямой AE. Дѣйствительно, еслибъ мы допустили такое совпаденіе, то прямыя AE и $A'E'$ (*фиг. 40*), имѣя общую часть, составили бы одну прямую, что̀ противорѣчитъ самому построенію. И такъ, естественно заключить, что разстояніе линіи c отъ AE не можетъ исчезнуть, даже при предѣлѣ, то есть при $m = \infty$. Условясь въ этомъ, окажется, что какъ бы мало не было разстояніе AC (*фиг. 41*), но какъ оно не равно нулю въ строгомъ смыслѣ, то неопредѣленное его повтореніе произведетъ длину ощутительную. Отсюда уже заключаемъ безъ всякаго затрудненія, что разстояніе AA' (*фиг. 42*) можетъ быть сдѣлано произвольно большимъ, и выводимъ потомъ отличительное свойство равноотстоянія параллельныхъ.

Впрочемъ, не переходя даже къ предѣлу $m = \infty$, мы въ

правѣ заключить, что разность $c - a$ неопредѣленно стремится къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая число m чрезвычайно большимъ, c будетъ очень мало разнствовать отъ a, такъ что избытокъ линіи c передъ линіей a можетъ быть уменьшенъ по произволенію. И такъ, степень точности равенства $c = a$ зависитъ отъ нашего произвола; еслибъ утверждали, положимъ, что разность $c - a$ превышаетъ $\frac{2b}{1000}$, то мы показали бы несправедливость такого утвержденія, взявъ, напримѣръ, $m = 1000$; дѣйствительно, получили бы въ этомъ случаѣ

$$c < a + \frac{2b}{1000}, \text{ или } c - a < \frac{2b}{1000}.$$

Тò же самое должно разумѣть и о перпендикулярѣ CP (*фиг. 41*), потому что $CP < CD$ или $< c$, при чёмъ разстояніе AC, какъ сказано выше, не можетъ уничтожиться.

Изъ предложенныхъ объясненій заключаемъ, что еслибъ между c и a существовала какая либо разность, — чтò повлекло бы за собой и разность между разстояніями двухъ параллельныхъ линій, — то она могла бы быть только *величиною безконечно малою*. Къ такому же слѣдствію привело бы насъ разсматриваніе суммы угловъ треугольника: руководствуясь подобными соображеніями, мы удостовѣрились бы, что еслибъ существовала разность между двумя прямыми углами и суммою трехъ угловъ треугольника, то она могла бы равняться только *безконечно малому углу*.

21. Въ n° 14 мы обѣщали пояснить нѣкоторыми развитіями примѣненіе *закона однородности* къ доказательству теоріи параллельныхъ линій. Мы полагаемъ, что для безусловной строгости доказательства, къ первоначальному понятію о прямой какъ о *кратчайшемъ разстояніи между двумя точками*, необходимо присовокупить еще другое, отличительное ея свойство, состоящее въ *отсутствіи въ ней всякаго параметра*. При такомъ взглядѣ на прямыя линіи, всё чтò относится до ихъ совокупленія между собою, доказывается очень просто. И такъ, мы скажемъ, что для начертанія всякой *кривой линіи* требуется одинъ или нѣсколько *параметровъ*, между тѣмъ какъ для начертанія *прямой линіи*, единственной въ своемъ родѣ, и существованіе которой мы сознаемъ бездоказательно, не требуется никакого

параметра. Дѣйствительно, всѣ прямыя, по наложеніи одной на другую, совпадаютъ во всѣхъ своихъ точкахъ, и поэтому тожественны между собою. Напротивъ того, совпаденіе по наложенію вообще не имѣетъ мѣста для кривыхъ линій, и ни одна изъ нихъ не можетъ быть построена безъ употребленія одного или нѣсколькихъ параметровъ, то есть *опредѣленныхъ линейныхъ мѣръ*, условливающихъ размѣры этихъ самыхъ кривыхъ, ихъ видъ и кривизну въ различныхъ точкахъ. Такъ размѣръ *круга* зависитъ отъ его *радіуса*, *параболы*, отъ ея *параметра; эллипсъ* и *ипербола* опредѣляются *двумя осями* и проч. Намъ скажутъ, что предложенныя сей-часъ понятія несвоевременны и слишкомъ отвлеченны для начинающихъ изученіе Геометріи; можетъ быть, это отчасти и справедливо; но заключеніе наше о характеристическомъ различіи между прямою и кривою линіею сдѣлается совершенно доступнымъ для всякаго на основаніи слѣдующаго замѣчанія: вообразимъ, что нѣсколько человѣкъ, независимо одинъ отъ другаго, провели каждый *прямую линію* и начертили *кругъ*, или другую *кривую линію* по условію. Несомнѣнно, что всѣ прямыя линіи *совпадутъ* по наложеніи одной на другую, потому именно, что черченіе ихъ не зависѣло ни отъ какой линейной мѣры. Что́ же касается до круговъ напримѣръ, то, совмѣстивъ ихъ центры, окажется, что всѣ эти круги различны по причинѣ произвольнаго выбора линейной мѣры, въ настоящемъ случаѣ *радіусовъ* круговъ.

Сказанное нами о прямыхъ и кривыхъ линіяхъ ведетъ, самымъ естественнымъ образомъ, къ совершенно подобному различію между *плоскостями* и *кривыми поверхностями*. И такъ, *плоскость*, существованіе которой мы только допускаемъ, *есть поверхность, независящая ни отъ какого параметра;* напротивъ того, *всякая кривая поверхность зависитъ отъ одного или отъ нѣсколькихъ параметровъ*.

Предложенное нами различіе между прямою и кривыми линіями можетъ быть еще разсматриваемо съ другой точки зрѣнія. Мы можемъ сказать, что *прямая есть такая линія, на которой не существуетъ совокупности двухъ точекъ* (*даже одной*), *отличающихся отъ другихъ точекъ той же прямой какою либо особенностію*. Это свойство, совершенно согласное съ нашими

первоначальными понятіями о прямой, не отличается въ сущности отъ приведеннаго выше въ отношеніи къ параметру; дѣйствительно, еслибъ на прямой линіи могли существовать хотя двѣ особенныя точки, то разстояніе между ними опредѣлило бы нѣкоторую *неизмѣнную длину*, которую и могли бы принять за *параметръ* прямой. Въ кривыхъ линіяхъ, напротивъ того, существуетъ безчисленное множество совокупленій двухъ или нѣсколькихъ точекъ, отличающихся какою либо особенностію; такъ, напримѣръ, въ *кругѣ* усматриваемъ безчисленное множество паръ точекъ, находящихся одна отъ другой на разстояніи *цѣлаго діаметра;* въ *параболѣ* имѣемъ *вершину* и множество другихъ точекъ, напримѣръ двѣ точки, опредѣляемыя пересѣченіемъ съ кривою перпендикуляра къ ея оси, проходящаго чрезъ фокусъ; въ *эллипсѣ* и *иперболѣ* двѣ *вершины* отличаются отъ другихъ точекъ и т. п. Во всѣхъ этихъ случаяхъ, разстояніе между двумя особенными точками опредѣлитъ неизмѣнную длину, которую можно принять за *параметръ* разсматриваемой кривой линіи.

Неизлишнимъ считаемъ замѣтить, что предложенныя сейчасъ опредѣленія для прямой и кривой линіи въ сущности нисколько не зависятъ отъ понятія о *кратчайшемъ разстояніи*, которое само составляетъ одно изъ отличительныхъ свойствъ прямой линіи. Хотя дѣйствительно мы и разумѣли подъ *параметромъ кратчайшее разстояніе* между двумя точками, представляющими какую либо особенность, но легко видѣть, что заключенія, выводимыя изъ нашихъ опредѣленій, нисколько не потеряютъ своей силы, когда понятіе о *кратчайшемъ разстояніи* замѣнимъ понятіемъ о *неизмѣнности положенія* двухъ разсматриваемыхъ точекъ, не упоминая даже о томъ, по какой именно линіи слѣдуетъ переходить отъ одной точки къ другой.

На основаніи предложеннаго въ началѣ этого n⁰ понятія о прямой линіи, мы докажемъ, совершенно строгимъ образомъ, *теорему о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ*.

Л. III. Ф. 53. Пусть будетъ AD наклонная, а BC перпендикуляръ къ AE. Слѣдуетъ доказать, что AD пересѣчется съ BC по достаточномъ продолженіи обѣихъ прямыхъ. Покажемъ, что не допустивъ пересѣченія, будемъ приведены къ явной невозможности. Если,

удаляясь отъ точки A, станемъ опускать изъ m, m', m''.... на прямую AE перпендикуляры mp, $m'p'$, $m''p''$...., которые очевидно не могутъ падать въ A, то можетъ случиться одно изъ двухъ: или основанія p, p', p''.... перпендикуляровъ будутъ неопредѣленно удаляться отъ вершины A угла, или же будутъ постепенно приближаться къ нѣкоторой точкѣ O, никогда не достигая ея, и слѣдовательно не переходя за сказанную точку. Первый случай ведетъ непосредственно къ заключенію, что всякая наклонная пересѣкается съ перпендикуляромъ. И такъ, мы должны разсмотрѣть второй случай, то есть допустить существованіе *предѣльной точки* O, и поэтому *предѣльной прямой линіи* AO, *длина которой опредѣляется угломъ* EAD. Но мы покажемъ, что такой зависимости *опредѣленной длины* отъ *прямолинейнаго угла* допустить невозможно. Для этого замѣтимъ во-первыхъ, что уголъ EAD вполнѣ опредѣляется тремя понятіями, именно: понятіемъ о *прямой линіи*, о *плоскости* и объ *отвлеченномъ числѣ*. Дѣйствительно, уголъ EAD, какой бы онъ не былъ, составитъ нѣкоторую опредѣленную часть прямаго угла EAF, построеннаго въ плоскости EAD; такъ, напримѣръ, онъ будетъ равенъ $\frac{2}{3}$ *прямаго*, и слѣдовательно величина его условливается отвлеченнымъ числомъ. По данному же *отвлеченному числу*, о которомъ говоримъ, и понятіи о *плоскости* и о *прямой линіи* для проведенія сторонъ угла EAD, этотъ уголъ опредѣлится вполнѣ. И такъ, *длина* AO должна, такъ сказать, получить происхожденіе изъ трехъ понятій: 1-е *неопредѣленной прямой*, 2-е *неопредѣленной плоскости* и 3-е *отвлеченнаго числа*. Но какъ ни одно изъ этихъ трехъ понятій не заключаетъ въ себѣ никакого элемента, однороднаго съ *именованною длиною*, то и заключаемъ, что *предѣльная линія* AO существовать не можетъ, и что, слѣдовательно, наклонная AD пересѣчетъ всякій перпендикуляръ BC, какъ бы точка B не была удалена отъ точки A.

22. *Законъ однородности*, употребленный въ предъидущемъ n⁰ 21, можетъ быть выраженъ и въ слѣдующемъ обратномъ видѣ: *данная длина прямой линіи не опредѣляетъ угла*. Дѣйствительно, данная длина, разсматриваемая отдѣльно, безъ всякой другой однородной съ нею величины для сравненія, очевидно не можетъ привести ни къ какому отвлеченному числу; слѣдо-

вательно она не можетъ опредѣлить и прямолинейнаго угла, который, какъ объяснено выше, выражается числомъ отвлеченнымъ. Допустивъ это начало, мы докажемъ очень просто и совершенно строго одно изъ основныхъ предложенiй, напримѣръ, существованiе четырехъ-сторонной прямолинейной фигуры, въ которой сумма четырехъ угловъ будетъ равна четыремъ прямымъ угламъ (предложенiе f 2-го рода, n⁰ 1).

Л. III. Ф. 54. Пусть прямая линiя, данной длины, будетъ *AB*. Примемъ её за катетъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника *ABC*, сдѣлавъ $AC = AB$; прямой уголъ будетъ при *A*, а общую величину равныхъ угловъ при *B* и *C* означимъ чрезъ *a*. Въ силу допущеннаго начала, уголъ *a* не будетъ зависѣть отъ опредѣленной длины *AB*; слѣдовательно, еслибъ измѣнили *AB* въ другую произвольную длину, положимъ въ *AD*, и построили новый равнобедренный прямоугольный треугольникъ *ADE*, въ которомъ $AE = AD$, то углы при *D* и *E*, не завися отъ катетовъ, имѣли бы прежнее общее значенiе *a*. Такимъ образомъ получаемъ четырехъ-стороннную прямолинейную фигуру *BCED* такого свойства, что сумма четырехъ угловъ ея равна четыремъ прямымъ угламъ. Выводъ дальнѣйшихъ слѣдствiй, проистекающихъ изъ этого основнаго свойства, не представляетъ уже никакихъ затрудненiй.

23. Заключимъ нашъ Опытъ краткимъ указанiемъ на пользу, которую можно вообще извлечь изъ *закона однородности* при изложенiи началъ Геометрiи. Начнемъ съ доказательства слѣдующаго предложенiя:

Двѣ прямыя, имѣющiя двѣ общiя точки, совпадаютъ во всемъ своемъ протяженiи.

Доказательство этой истины, обыкновенно предлагаемое въ курсахъ, подаетъ поводъ къ справедливымъ возраженiямъ. И во-первыхъ, оно основано на теоремѣ о *равенствѣ прямыхъ угловъ*, а это предложенiе, какъ намъ кажется, не можетъ быть строго оправдано не допустивъ самой истины, которую имѣемъ въ виду доказать. Съ другой стороны, въ доказательствѣ опускаютъ, безъ разсмотрѣнiя, предположенiе о возможности *безконечно малыхъ прямолинейныхъ угловъ*. Войдемъ по этому предмету въ нѣкоторыя подробности, и приведемъ, для бо́льшей

опредѣлительности, изложенiе занимающей насъ истины, заимствуя его у Лежандра.

«Пусть общiя точки будутъ A и B; прежде всего замѣтимъ, что двѣ прямыя между A и B сливаются въ одну, иначе между двумя точками проходили бы двѣ прямыя линiи, что̀ невозможно въ силу принятой аксiомы. Положимъ теперь, что двѣ разсматриваемыя линiи, по продолженiи ихъ, начинаютъ расходиться въ точкѣ C, такъ что одна изъ нихъ идетъ по CD, а другая по CE. Изъ точки C проводимъ CF такъ, чтобы уголъ ACF былъ прямой. Но линiя ACD прямая; слѣдовательно уголъ FCD будетъ прямой; также линiя ACE прямая, почему и уголъ FCE прямой. Съ другой же стороны часть FCE не можетъ быть равна цѣлому FCD; отсюда заключаемъ, что когда прямыя имѣютъ двѣ общiя точки A и B, то онѣ не могутъ разъединиться ни въ какой точкѣ, а поэтому совмѣщаются во всемъ своемъ протяженiи.» Л. III. Ф. 55.

Это доказательство, какъ уже замѣчено выше, основано на теоремѣ о *равенствѣ прямыхъ угловъ;* сверхъ того въ немъ предполагается, что уголъ DCE есть *конечный*. Но при строгомъ воззрѣнiи на предметъ, слѣдовало бы предупредить возраженiе, что этотъ уголъ DCE можетъ быть *безконечно малымъ*, подобно углу, составляемому касательною съ кривою линiей. И дѣйствительно, на какомъ основанiи допускаемъ мы, что двѣ прямыя, въ общей имъ точкѣ, не могутъ находиться точно въ такихъ же обстоятельствахъ одна въ разсужденiи другой, какъ двѣ кривыя линiи, или какъ кривая и прямая, взаимно-касательныя? Чѣмъ отличаемъ мы, въ нашихъ заключенiяхъ, прямую CE отъ частей кривыхъ, каковы напримѣръ CG и CG', которыя имѣли бы въ точкѣ C касательную CD? Вотъ вопросы, которые, безъ сомнѣнiя, мы имѣемъ право предложить себѣ. Поэтому намъ и кажется, что обыкновенныя доказательства приводимой теоремы не совсѣмъ удовлетворительны со стороны строгости.

Руководствуясь предложеннымъ выше понятiемъ о свойствѣ прямой линiи, по которому она не можетъ привести къ *опредѣленной длинѣ*, мы въ состоянiи доказать строгимъ образомъ занимающее насъ предложенiе. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ AB и DE двѣ прямыя, пересѣкающiяся въ точкѣ C. Положимъ, что Л. III. Ф. 56.

прямую DE обращаемъ около C въ первоначальной плоскости двухъ линій AB и DE, и что она приняла положеніе $D'E'$. При переходѣ могло случиться одно изъ двухъ: или линія DE всѣми точками своими совмѣщалась съ AB, или не всѣми. Первое предположеніе ведетъ прямо къ заключенію о справедливости теоремы, и поэтому нечего на немъ и останавливаться. Во второмъ предположеніи должно допустить существованіе нѣкоторыхъ точекъ F, G.... по одну сторону C, и соотвѣтственныхъ имъ F', G'.... по другую, общихъ обѣимъ прямымъ AB и DE. Но это невозможно потому что тогда двѣ прямыя AB и DE, противно сказанному, опредѣлили бы *именованную длину*, напримѣръ CF, предполагая, что точка F есть ближайшая къ C. Слѣдовательно, *двѣ прямыя могутъ имѣть или одну общую точку, или всѣ.*

Въ заключеніе приложимъ тѣ же соображенія къ другой, также основной теоріи Геометріи, именно къ *свойствамъ пропор-*
Л. III. Ф. 37. *ціональныхъ линій*. Положимъ, что данъ уголъ $BAC = \alpha$; сверхъ того допустимъ, что имѣемъ еще другой уголъ $EDF = \beta$ съ условіемъ, что сумма $\alpha + \beta$ менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Если чрезъ произвольныя точки p, p', p''.... прямой AB, проведемъ линіи pm, $p'm'$, $p''m''$....такъ, чтобы углы Apm, $Ap'm'$, $Ap''m''$.... были равны β, то эти прямыя pm, $p'm'$, $p''m''$.... непремѣнно пересѣкутъ AC въ силу Эвклидовой 11-й аксіомы, которая сама есть слѣдствіе доказаннаго въ n⁰ 21 предложенія о пересѣченіи наклонной съ перпендикуляромъ. Разсмотримъ теперь отношенія:

$$\frac{Ap}{pm}, \frac{Ap'}{p'm'}, \frac{Ap''}{p''m''} \ldots.;$$

можетъ случиться одно изъ двухъ: или всѣ эти отношенія будутъ равны между собою, или между ними найдутся по крайней мѣрѣ два различныя. Первое предположеніе приводитъ непосредственно къ *теоріи пропорціональныхъ линій*, которая слѣдовательно будетъ доказана, если покажемъ, что второе предположеніе невозможно. Допустимъ же, что два изъ приведенныхъ отношеній, напримѣръ

$$\frac{Ap}{pm} \text{ и } \frac{Ap'}{p'm'},$$

различны между собой; тогда получимъ

$$\frac{Ap}{pm} = \frac{Ap'}{p'm'} \pm \delta,$$

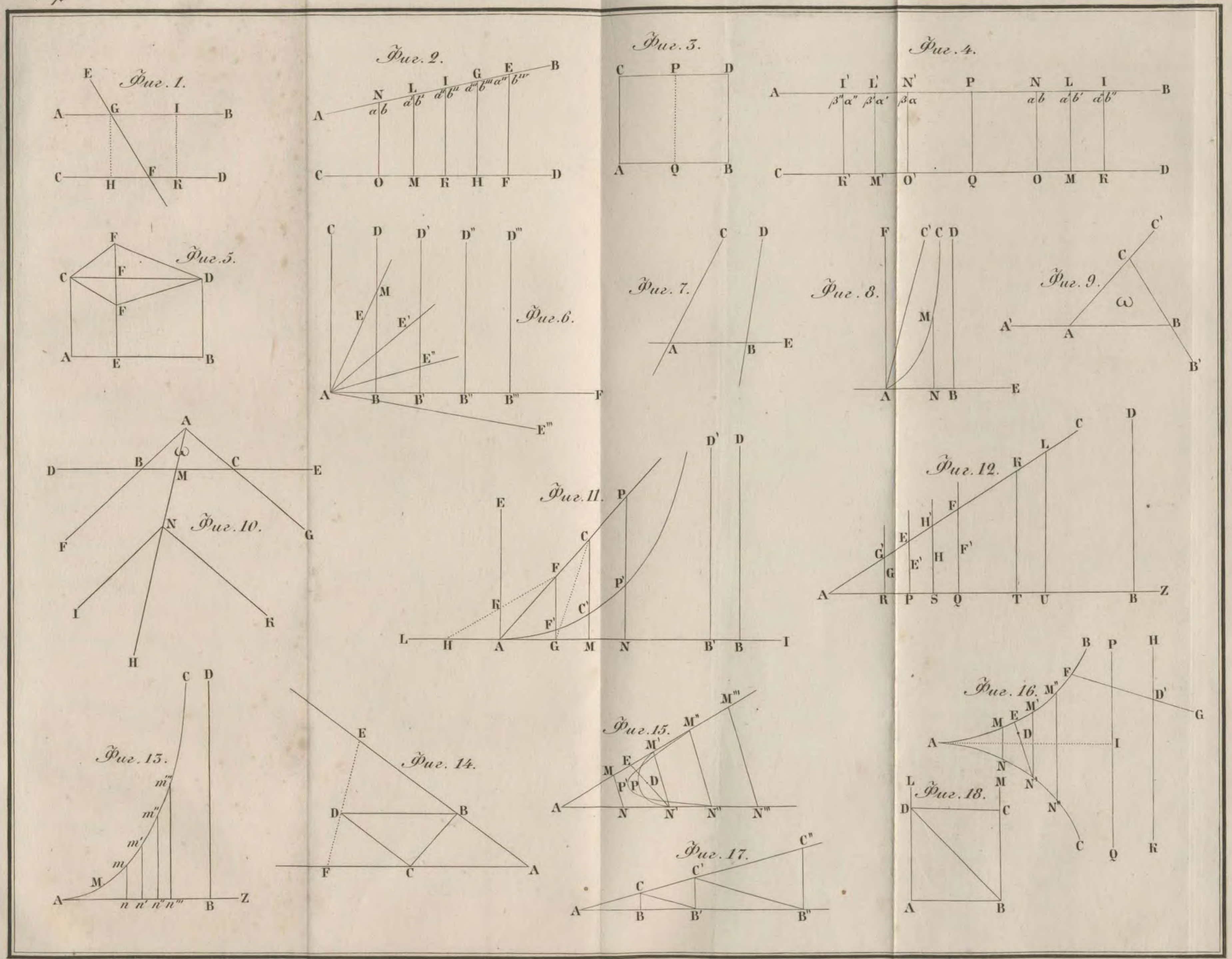
разумѣя подъ δ число отвлеченное, отличное отъ нуля. Если бы это равенство, при величинѣ δ данной напередъ и выбранной надлежащимъ образомъ, могло состояться нѣсколько разъ, то есть для нѣсколькихъ системъ параллельныхъ линій, каковы pm, $p'm'$, $p''m''$...., то мы приняли бы pm и $p'm'$ за первую изъ этихъ системъ, именно за ту, для которой pm и $p'm'$ наиближе отстоятъ отъ точки A. И такъ, въ допущенномъ предположеніи, данныя нашего вопроса, то есть два *прямолинейные угла* α и β съ *отвлеченнымъ числомъ* δ, опредѣлили бы нѣкоторую *длину*, напримѣръ Ap или Am, или еще перпендикулярное разстояніе между двумя параллельными линіями pm и $p'm'$, чего быть не можетъ. Отсюда должно заключить, что второе предположеніе невозможно, и что слѣдовательно всѣ отношенія

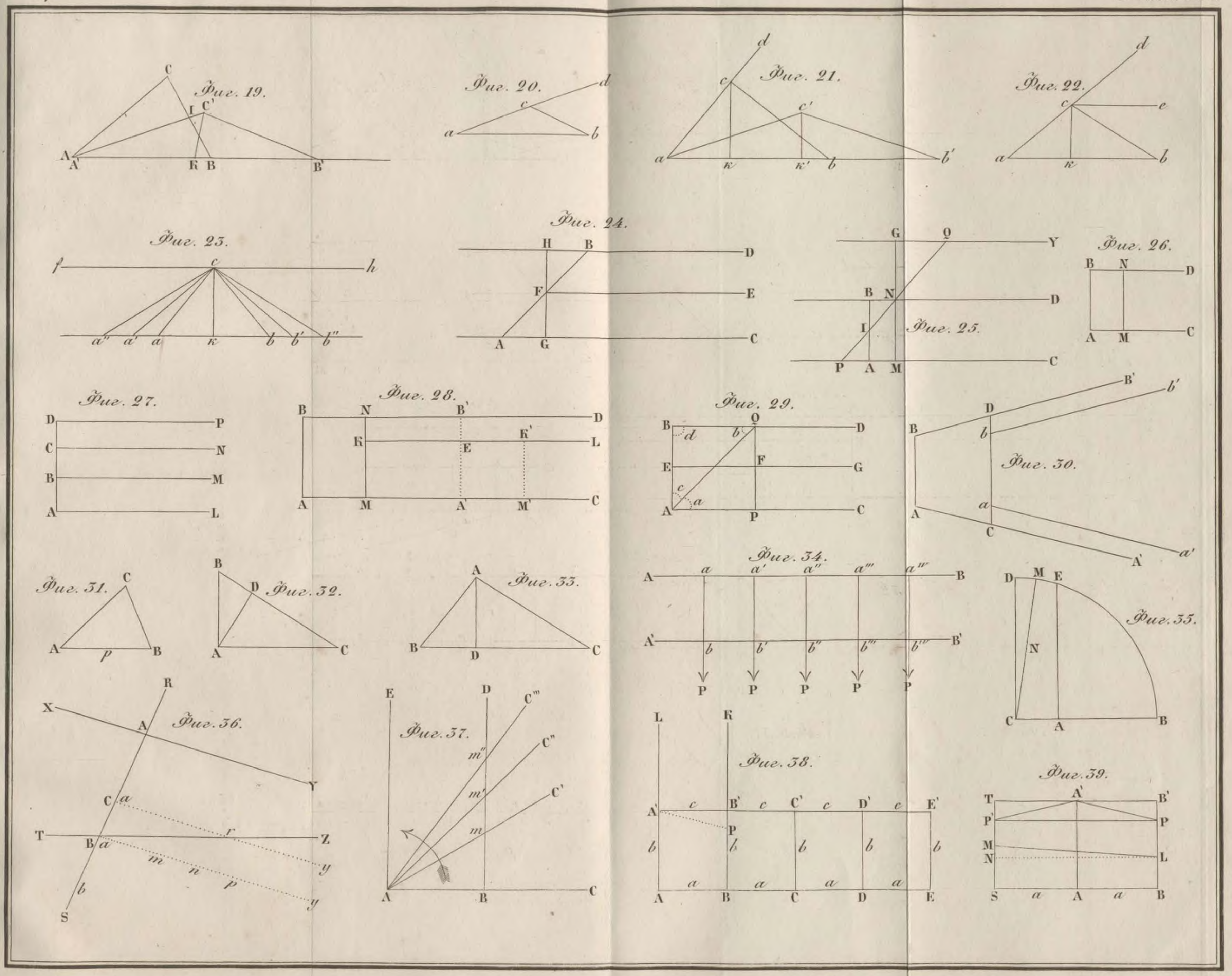
$$\frac{Ap}{pm}, \ \frac{Ap'}{p'm'}, \ \frac{Ap''}{p''m''} \cdots\cdot$$

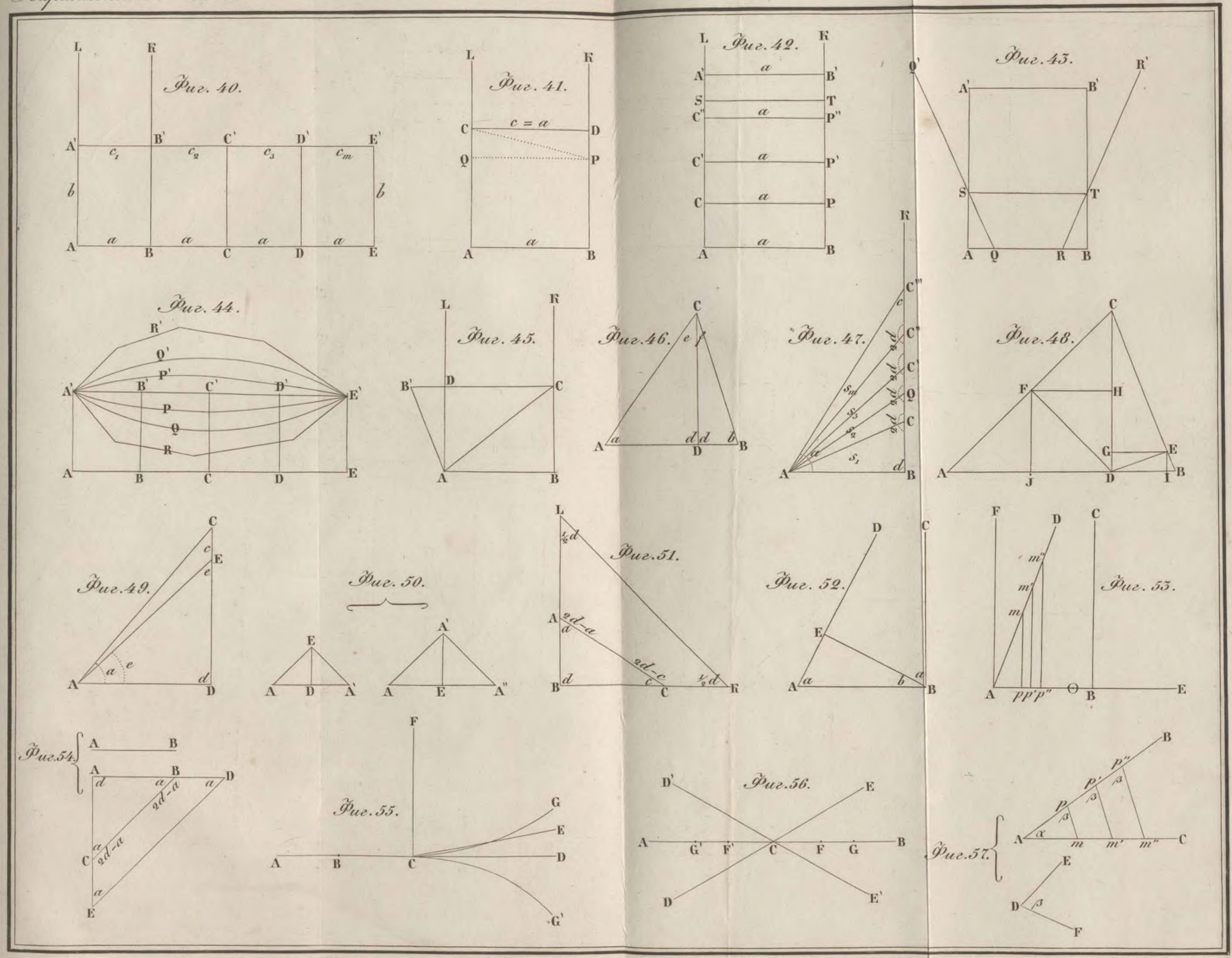
равны между собою, въ чёмъ и состоитъ отличительное свойство пропорціональныхъ линій. Предложенное доказательство этой теоріи, сверхъ простоты своей, имѣетъ еще и тò преимущество, что равно приличествуетъ какъ случаю соизмѣримыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ между собою линій.

Легко усмотрѣть, что подобныя сужденія, основанныя на томъ же *законѣ однородности*, могутъ привести къ совершенно строгимъ доказательствамъ другихъ истинъ, относящихся къ Геометріи.

(Перепечатано изъ II-го Тома Ученыхъ Записокъ Императорской Академіи Наукъ по первому и третьему Отдѣленіямъ.)


Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 13.
Фиг. 14.
Фиг. 15.
Фиг. 16.
Фиг. 17.
Фиг. 18.


Фиг. 19.
Фиг. 20.
Фиг. 21.
Фиг. 22.
Фиг. 23.
Фиг. 24.
Фиг. 25.
Фиг. 26.
Фиг. 27.
Фиг. 28.
Фиг. 29.
Фиг. 30.
Фиг. 31.
Фиг. 32.
Фиг. 33.
Фиг. 34.
Фиг. 35.
Фиг. 36.
Фиг. 37.
Фиг. 38.
Фиг. 39.


Фиг. 40.
Фиг. 41.
c = a
Фиг. 42.
Фиг. 43.
Фиг. 44.
Фиг. 45.
Фиг. 46.
Фиг. 47.
Фиг. 48.
Фиг. 49.
Фиг. 50.
Фиг. 51.
2d-a
2d-c
Фиг. 52.
Фиг. 53.
Фиг. 54.
2d-a
Фиг. 55.
Фиг. 56.
Фиг. 57.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКОЕ ОБЪЯВЛЕНІЕ.

Ученыя Записки Императорской Академіи Наукъ по I и III Отдѣленіямъ. Томъ I. СПб., 1853. VI, CXL и 668 стр. in-8°. Цѣна 2 р. серебр.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе: 1. Объ ученыхъ сборникахъ и періодическихъ изданіяхъ Императорской Академіи Наукъ, съ 1726 по 1852 годъ, — *ка.* — 2. Объ изданіи Ученыхъ Записокъ Императорской Академіи Наукъ.

Отчетъ Императорской Академіи Наукъ по I и III Отдѣленіямъ, за 1851 годъ.— Воспоминаніе объ академикѣ Фр. Грефе. Письмо Президента Императорской Академіи Наукъ, графа *С. С. Уварова.* — О древне-классическомъ памятникѣ, перевезенномъ изъ Рима въ Порѣчье. Записка Президента Императорской Академіи Наукъ, графа *С. С. Уварова.* — Грамматическія изслѣдованія о русскомъ языкѣ, *О. Бетлинга.* — Общій Отчетъ о двадцать-первомъ присужденіи Демидовскихъ наградъ, составленный Непремѣннымъ Секретаремъ. — Изслѣдованіе о мѣстѣ погребенія князя Дмитрія Михайловича Пожарскаго. Изъ донесенія академика *Погодина.* — Полное солнечное затмѣніе въ нѣкоторыхъ мѣстахъ Сибири, 1852 года дек. 11, по новому стилю, академика *Д. Перевощикова.* — Отчетъ главной физической обсерваторіи за 1851 годъ, представленный директоромъ ея, академикомъ *Купферомъ* г. Управляющему Министерствомъ Финансовъ.— О разведеніи устрицъ въ финскомъ заливѣ. Разсужденіе академика *Гамеля.* — О подлогѣ именъ древне-классическихъ художниковъ на рѣзныхъ камняхъ. Извлеченіе изъ разсужденія академика *Стефани.* — Замѣчанія о малоизвѣстныхъ насѣкомоядныхъ русской фауны, съ присовокупленіемъ объяснительнаго описанія русскихъ и западно-европейскихъ формъ куторы. Извлеченіе изъ разсужденія академика *Брандта.* — О задачахъ

иппологіи въ отношеніи къ потребностямъ кавалеріи. Академика *Миддендорфа.* — Изложеніе элементарнаго способа для суммованія конечныхъ рядовъ, разсматриваемыхъ въ начальной алгебрѣ, съ приложеніемъ его къ нѣкоторымъ безконечнымъ строкамъ. Академика *В. Буняковскаго.* — О языкѣ Якутовъ. Опытъ изслѣдованія отдѣльнаго языка въ связи съ современнымъ состояніемъ всеобщаго языкознанія. *О. Бетлинга.* — О предвареніи равноденствій и колебаніи земной оси. Академика *Д. Перевощикова.* — Свѣдѣніе о грузинской царицѣ Тамарѣ, въ древней русской литературѣ. Академика *Броссе.* — О значеніи словъ: Юмала и Укко въ финской миѳологіи. Изъ лекцій профессора *А. Кастрена.*

Историко-Литературная Лѣтопись Академіи: Первая аудіенція академиковъ у Императрицы Екатерины I, 15 августа 1725 года. — О книгѣ: «Палаты Академіи....» Сообщено *Г. Н. Геннади.* — О русскомъ изданіи рѣчи, говоренной профессоромъ Бильфингеромъ при отъѣздѣ изъ Тюбингена въ С. Петербургъ въ 1725 году. — Извѣстіе о первомъ изданіи книги: «Палаты Академіи». — О портретахъ и изображеніяхъ правительницы Анны. Опытъ критики портретовъ въ смыслѣ источниковъ для русской исторіи.

Современная Исторія Академіи: 17 статей. — Хронологическая Таблица. — Перечень личныхъ именъ, встрѣчающихся въ I-мъ томѣ Ученыхъ Записокъ.

Получать можно у Коммиссіонеровъ Императорской Академіи Наукъ: И. Глазунова, *въ СПб.*, Эггерса и Комп., *въ СПб.* *и* П. Должикова, *въ Кіевѣ.* — *Кромѣ того, какъ здѣшніе, такъ и иногородные подписчики могутъ обращаться съ своими требованіями въ Комитетъ Правленія Академіи Наукъ.*

Инспектору

